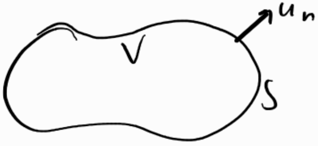
e.q. Maxwell – regime variante

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -\dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{H} = \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \\ \nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ + \text{ conservaz. carica : } \nabla \cdot \bar{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases}$$

conservaz. carica:



un flusso positivo cioè uscente di $\bar{J}$ comporta una var. negativa nel tempo della carica nel volume

$$\iint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n \, dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \nabla \cdot \bar{J} \, dV$$

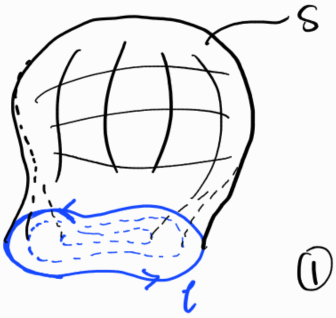
teo. Gauss della divergenza

$$\Rightarrow \iiint_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \iiint_V \nabla \cdot \bar{J} \, dV$$

$\rho = \rho(t, x, y, z)$
$\Rightarrow$ derivata parziale

$$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

possiamo anche dedurla:



$$\int_\ell \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \iint_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, dS + \iint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n \, dS$$

faccio tendere $\ell \to 0$ $\Rightarrow$ S diventa sup. chiusa

① $$\Rightarrow \iint_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, dS = -\iint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n \, dS = -\iiint_V \nabla \cdot \bar{J} \, dV$$

teo. di Gauss della divergenza

so anche che:

② $$\iint_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, dS = \frac{d}{dt} \iiint_V \nabla \cdot \bar{D} \, dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

$$\underbrace{\iint_S \bar{D} \cdot \hat{u}_n \, dS}_{\iiint_V \nabla \cdot \bar{D} \, dV} = \iiint_\Omega \rho_\Omega \, d\Omega$$

① + ② $$\Rightarrow \iint_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \hat{u}_n \, dS = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot \bar{J} \, dV$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

quindi la conservaz. della carica non è una eq. indipendente dalle altre incognite vett. $\bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{J} \Rightarrow$ 15 incognite scalari

$\underbrace{\text{2 eq. vett. indipendenti}}_{\text{(quelle del rotore)}} \Rightarrow$ 6 eq. scalari indipendenti

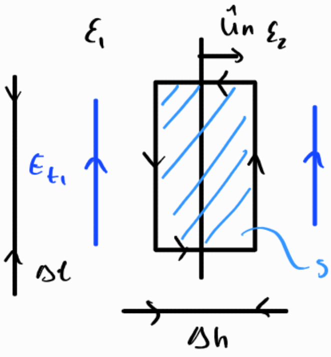
↳ mancano 9 eq. scalari $\Rightarrow$ si ricavano dalle relaz. costitutive del mezzo. In gen. sono abb. complicate

$$\Rightarrow \text{3 eq. vett, 9 scalari} \begin{cases} \bar{D} = f_D(\bar{E}, \bar{H}) \\ \bar{B} = f_B(\bar{E}, \bar{H}) \\ \bar{J} = f_J(\bar{E}, \bar{H}) \end{cases} \xrightarrow[\text{mezzi lin., omogenei, isotropi}]{} \begin{cases} \bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_E) \bar{E} \\ \bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{E} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} \\ \bar{J} = \sigma \bar{E} \end{cases}$$

(isotropo: ε scalare, non tensore)
(omogeneo: ε cost. nel mezzo)
(lineare: $\bar{D} \propto \bar{E}$)

condiz. al contorno

$\bar{E}$



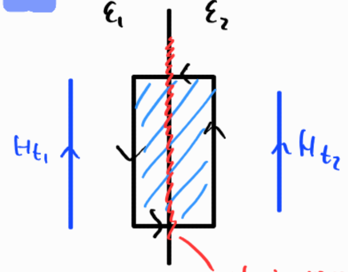
$$\int_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_n \, dS$$

se $\Delta h \to 0$, $S \to 0 \Rightarrow \int_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$

$\Rightarrow \Delta l E_{t_1} - \Delta l E_{t_2} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$
$(\hat{u}_n \cdot (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0)$

come nel caso di regime statico la componente tangente del campo magnetico si conserva

$\bar{H}$



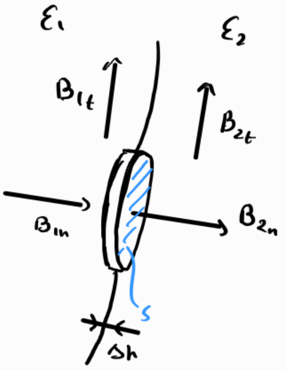
potrei avere J_s all'interfaccia

$$\int_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \underbrace{\frac{d}{dt} \iint_S \bar{D} \cdot \hat{u}_n \, dS}_{\to 0 \text{ per } \Delta h \to 0} + \underbrace{\iint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n \, dS}_{\text{non è detto che} \to 0 \text{ perchè potrei avere una densità sup. } J_s \text{ all'interfaccia}}$$

$\Rightarrow \Delta l H_{1t} - \Delta l H_{2t} = I \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = J_s$ ↳ $[A/m]$

come nel caso statico

$\bar{B}$

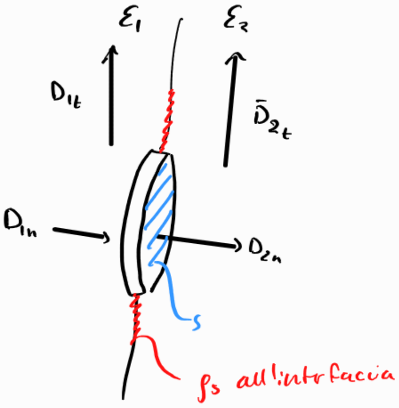


$$\iint_S \bar{B}\cdot\hat{u}_n dS = 0$$

per $\Delta h \to 0$ trovo $-S\cdot B_{1n} + S B_{2n} = 0$

$\Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$ come nel caso statico la comp. perp. di $\bar{B}$ si conserva

$\bar{D}$



$$\iint_S \bar{D}\cdot\hat{u}_n dS = \iiint_V \rho_\Omega dV = Q \quad [C]$$

se $\Delta h \to 0$ l'unico modo per avere carica è che ci sia densità sup. di carica all'interfaccia

per $\Delta h \to 0$

$\Rightarrow -D_{1n}\cdot S + D_{2n}\cdot S = Q \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad [C/m^2]$

alternativamente: per $\Delta h \to 0$ $\iiint_V \rho_\Omega dV \to \iint_S \rho_s dS$

(int. di volume diventa di sup.)

anche se $S \neq 0$, è suff. piccola da poter considerare le grandezze in gioco localmente cost.

$\hookrightarrow \iint_S \bar{D}\cdot\hat{u}_n dS = -D_{1n}\cdot S + D_{2n}\cdot S = \iint_S \rho_s dS = \rho_s \underbrace{\iint_S dS}_{S}$

$\Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$

teo. di Poynting

vett. di Poynting: $\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H}$ $[W/m^2]$

$$\iint_\Sigma \bar{S}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = \iiint_V \nabla\cdot\bar{S}\, dV \Rightarrow \nabla\cdot\bar{S} = \nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = \bar{H}\cdot\nabla\times\bar{E} - \bar{E}\times\nabla\cdot\bar{H} = \bar{H}\cdot\left(\frac{-\partial\bar{B}}{\partial t}\right) - \bar{E}\cdot\left(\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{J}\right)$$

teo. Gauss divergenza

$$\begin{cases}\nabla\times\bar{E} = -\dfrac{\partial\bar{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\bar{H} = \dfrac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \sigma\bar{E}\end{cases}$$

consideriamo una assenza di sorgenti

$\hookrightarrow \bar{J} = \bar{J}_I + \sigma\bar{E} = \sigma\bar{E}$ $\bar{J}$ è solo di conduz. $= \sigma\bar{E}$

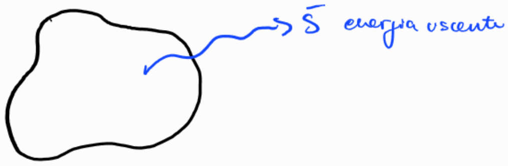
impressa da un gen.

$$\begin{cases}\bar{H} = \bar{B}/\mu\\ \bar{D} = \varepsilon\bar{E}\end{cases} \Rightarrow -\mu\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} - \varepsilon\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \sigma|\bar{E}|^2 = \frac{-\mu}{2}\cdot\frac{\partial|\bar{H}|^2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\partial|\bar{E}|^2}{\partial t} - \sigma|\bar{E}|^2 = \iint_\Sigma \bar{S}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = \iiint_V \nabla\cdot\bar{S}\, dV$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}[|\bar{H}|^2] = 2\bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V -\frac{1}{2}\mu|\bar{H}|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon|\bar{E}|^2 dV - \iiint_V \sigma|\bar{E}|^2 dV = \iint_\Sigma \bar{S}\cdot\hat{u}_n d\Sigma$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{var. nel tempo dell'energia immagazzinata}} \underbrace{\iiint_V \frac{1}{2}\mu|\bar{H}|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon|\bar{E}|^2\, dV}_{\text{energia immagazzinata}} = \underbrace{\iint_\Sigma \bar{S}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma}_{\text{flusso vett. Poynting}} + \underbrace{\iiint_V \sigma\bar{E}\, dV}_{\text{potenza dissipata}}$$



- cioè il flusso <u>uscente</u> del vett. di Poynting (potenza irraggiata dal volume) + potenza dissipata = diminuzione dell'energia immagazzinata

eq. Maxwell in assenza di sorgenti

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}+\bar{J} \\ \nabla\cdot\bar{D} = \cancel{\rho} \\ \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\cdot\bar{J} = \cancel{-\frac{\partial\rho}{\partial t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}+\bar{J} \\ \nabla\cdot\bar{D} = 0 \\ \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\cdot\bar{J} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\nabla\times\bar{E} = \nabla\times -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\bar{H}] \Rightarrow -\nabla^2\bar{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}+\bar{J}\right]$$

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{H} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}+\bar{J} \\ \nabla\times\nabla\times\bar{E} = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\bar{E}}_{0})-\nabla^2\bar{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow +\nabla^2\bar{E} = +\mu\frac{\partial^2\bar{D}}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial\bar{J}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\bar{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$$

$\sigma \neq 0 \Rightarrow$ mezzo <u>non</u> ideale $\Rightarrow \nexists$ sol.

$\Rightarrow$ (mezzi ideali) $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla^2\bar{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}}$ equaz. di Helmholtz (delle onde)

$$E(x,y,z,t)\begin{cases} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ E_z(x,y,z,t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\bar{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} \begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

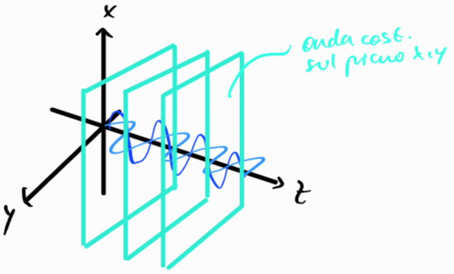
$$\nabla^2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \end{bmatrix}$$

↳ una possibile sol. ⇒ onda piana uniforme

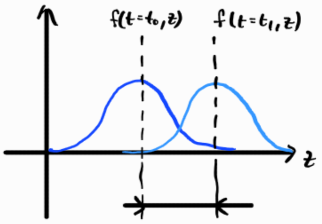
onda piana uniforme

piana: $\bar{E}$ e $\bar{H}$ giacciono su piani //

uniforme: $\bar{E}$ e $\bar{H}$ sono cost. sui piani



- onda: una perturbaz. che viaggia



$$f(z,t) = f(\underbrace{t-z/v}_{x=t-z/v})$$

affinché i val. della funz. coincidano, devono coincidere anche gli argomenti ⇒ cioè: $f(x_1)=k$, $f(x_2)=k \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2$

$$\Rightarrow E(\underbrace{x,y}_{\text{cost.}},z,t) = E(z,t) = \overset{\text{onda progressiva, viaggia verso z}}{E^{+}}(t-z/v) \quad \text{onda piana uniforme}$$

vediamo se (l'onda piana uniforme) soddisfa l'eq. di Helmhoz

$$\begin{cases} \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \cancel{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$E = E(t - z/v) \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} \cdot -\frac{1}{v} \cdot E'' = \mu \varepsilon E'' \Rightarrow \frac{1}{v^2} E'' = \mu \varepsilon E''$$

verificata $\Leftrightarrow$ $v^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ nel vuoto $\begin{cases} \mu = \mu_0 \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

onde piane trasverse elettromagnetiche (TEM)

$$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{u}_z$$

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -\mu \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\bar{E}(z,t) \text{ onda piana } = \underbrace{\bar{E}^+(t - z/v)}_{\text{onda progressiva}} + \underbrace{\bar{E}^-(t + z/v)}_{\text{onda regressiva}}$$ costante sul piano xy

$$\nabla \times \bar{E} = \left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}}\right)\hat{u}_y + \left(\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}\right)\hat{u}_z$$

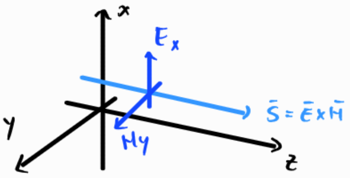
$$= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{u}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \dfrac{\partial H_x}{\partial t} & \text{eq. con coppia } E_y, H_x \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = \dfrac{\partial H_y}{\partial t} & \text{eq. con coppia } E_x, H_y \\ \emptyset = \mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times \bar{H} = \left(\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}}\right)\hat{u}_y + \left(\cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}}\right)\hat{u}_z$$ (considero sempre un'onda piana)

$$\Rightarrow \nabla \times \bar{H} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \dfrac{\partial E_x}{\partial t} & \text{eq. con coppia } E_x, H_y \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & \text{eq. con coppia } E_y, H_x \\ \emptyset = \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

- le componenti z di $\bar{H}$ e $\bar{E}$, H_z e E_z sono o nulle o costanti. In ogni caso non ci interessano perchè non hanno dipendenza dal tempo e non sono quindi onde
- le coppie E_x, H_y e E_y, H_x sono indipendenti fra loro ⇒ ragioneremo sulla coppia E_x, H_y, tanto poi quello che diremo su E_x, H_y sarà valido anche per E_y, H_x
- $\bar{E}, \bar{H}$ sono ⊥ nello spazio e complanari



$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$E^+\left(t - \frac{z}{v}\right) \Rightarrow -\frac{1}{v} E^{+'}\left(t - \frac{z}{v}\right) = -\mu \frac{\partial H_y^+}{\partial t} \Rightarrow H_y^+(z,t) = \frac{1}{\mu v} E_x^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + k$$

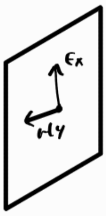
↑ costante magnetostatica che pongo $= \emptyset$

$$\Rightarrow H_y = \frac{1}{\mu v} E_x \Rightarrow \frac{E_x}{H_y} = \mu v = \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\mu/\varepsilon} =: \eta \qquad [\Omega] = \frac{[V/m]}{[A/m]} = [V/A]$$ impedenza intrinseca del mezzo

$$\eta_0 \,(\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0) = 377\,\Omega$$

⇒ val. costante, non complesso

↳ $\bar{E}$ e $\bar{H}$ sono <u>in fase nel tempo</u>



andamento sinusoidale

- consideriamo un andamento sinusoidale (potrebbero esserci anche altri andamenti)
- studiamo la componente progressiva

cost. di propagaz.

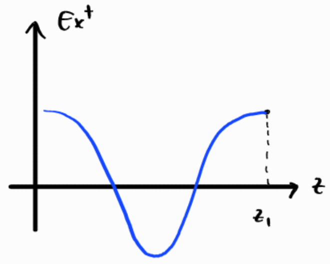
$$E_x^+(t-z/v) = A\cos[\omega(t-z/c)] = A\cos(\omega t - \tfrac{\omega}{c}z) = A\cos(\omega t - \beta z) \quad [V/m]$$

$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -(-A\sin(\omega t-\beta z)\cdot(-\beta) \Rightarrow H_y^+(t,z) = A\beta\cdot -(-\cos(\omega t-\beta z))\cdot\frac{1}{\omega\mu} = A\cdot\boxed{\frac{\beta}{\omega\mu}}\cos(\omega t-\beta z) \quad [A/m]$$

$$\frac{\beta}{\omega\mu} = \frac{\cancel{\omega}/c}{\cancel{\omega}\mu} = \frac{1}{c\cdot\mu} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu} = \sqrt{\varepsilon/\mu} = \frac{1}{\eta}$$

$$H_y^+(t,z) = \frac{A}{\eta}\cos(\omega t-\beta z)$$

$(t=\phi)$



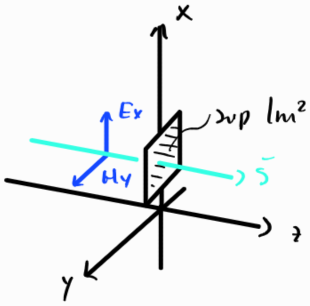
fase in z_1 — fase dopo un periodo

$$\beta\cdot z_1 = 0 + 2\pi$$

fase iniziale

$$\Rightarrow z_1 = 2\pi/\beta = \frac{2\pi}{\omega}c = \frac{\cancel{2\pi}c}{\cancel{2\pi}\nu} = \frac{c}{\nu} = \lambda$$

$$\Rightarrow \beta = 2\pi/\lambda$$



$\hat{u}_x \times \hat{u}_y$

$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} = \left[A\cos(\omega t)\cdot\frac{A}{\eta_0}(\omega t)\right]\hat{u}_z = \frac{A^2}{\eta_0}\cos^2(\omega t)\,\hat{u}_z \quad [W/m^2]$$

vett. Poynting istantaneo

(mi pongo in $z=\phi$ per comodità)

$$S_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{\eta_0}\cos^2(\omega t)\,dt$$

se la media int. $\neq \phi \Rightarrow$ vuol dire che in media c'è un flusso netto di potenza lungo l'asse z

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{A^2}{\eta_0}\cos^2(\omega t)\,dt \quad \left[\begin{array}{l}\omega t = x\\ dt\cdot\omega = dx\end{array}\right] \Rightarrow \frac{\cancel{\omega}}{2\pi}\cdot\frac{A^2}{\cancel{\eta_0}}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{A^2}{2\pi\eta_0}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{A^2}{2\pi\eta_0}\cdot\pi = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\eta_0}$$

analogia con correnti e tensione:

$$\begin{cases} v(t) = A\cos(\omega t) \\ i(t) = \frac{v(t)}{R}\end{cases} \Rightarrow p(t) = v(t)\cdot i(t) = A^2\cos^2(\omega t)\cdot\frac{1}{R} \Rightarrow P_{media} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{R}$$

potevo arrivare alla stessa conclusione considerando:

componente in continua

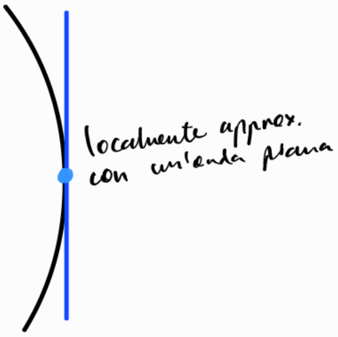
$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} = \frac{A^2}{\eta_0}\cos^2(\omega t) = \frac{A^2}{\eta_0}\left[\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2\omega t)}_{\text{val. medio su un periodo } = \phi}\right] \Rightarrow S_{medio} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\eta_0}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{S}_{media} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\eta_0}} \quad [W/m^2]$$

- da questo risultato deduciamo che ∄ l'onda piana nella realtà
  ↳ se dovessi integrare $\bar{S}_{media}$ su un piano (quindi all'infinito) otterrei una potenza ∞

- è comunque utile studiare perché sono una buona approx. del mondo reale



regime sinusoidale (dominio dei fasori)

$$v(t) = A\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\left[A e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi}\right] \Rightarrow \underset{\uparrow \text{ fasore}}{V} = Ae^{j\varphi}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow \cdot j\omega$ derivaz. rispetto al tempo $\Leftrightarrow$ moltiplicaz. per $j\omega$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{Ae^{j(\omega t+\varphi)}}_{f(t)} = j\omega \underbrace{Ae^{j(\omega t+\varphi)}}_{f(t)} = j\omega f(t)\right)$

(assenza di sorgenti)
$$\begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \nabla\times\bar{H} = \varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \sigma\bar{E} \\ \nabla\cdot\bar{E} = 0 \\ \nabla\cdot\bar{H} = 0 \\ \nabla\cdot\bar{J} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \\ \nabla\times\bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \sigma\bar{E} \end{cases}$$

$$\nabla\times\nabla\times\bar{E} = \nabla\times(-j\omega\mu\bar{H}) = -j\omega\mu\,\nabla\times\bar{H} = -j\omega\mu\cdot(j\omega\varepsilon\bar{E}+\sigma\bar{E})$$

$$\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\bar{E}}}_{0}) - \nabla^2\bar{E} = (\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma)\bar{E}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\bar{E} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon)\bar{E} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\bar{E} = \gamma^2\bar{E}}$$ eq. di Helmholtz (delle onde)

con $\boxed{\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma}$

↳ la risolvo nel dom. dei fasori, l'ho ricavata considerando l'onda piana come exp. complesso

oss. $\sigma \neq 0$!! sto considerando anche mezzi non ideali, adesso riesco a risolvere l'eq. anche in presenza di perdite

considero: onda piana uniforme $\Rightarrow \bar{E} = \bar{E}(z)$

$$\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\bar{E}}{\partial z^2} = \gamma^2\bar{E} \qquad \bar{E}(z) = \begin{cases} E_x(z)\,\hat{u}_x \\ E_y(z)\,\hat{u}_y \\ E_z(z)\,\hat{u}_z \end{cases}$$

$$\bar{E}(z) = \bar{E}^+(0)e^{-\gamma z} + \bar{E}^-(0)e^{+\gamma z}$$ (considero solo la progressiva per semplicità)

γ: costante di propagaz. $[1/m]$

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma} = \alpha + j\beta \quad [1/m]$$

$$\nabla\times\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{u}_y - \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{u}_x = -j\omega\mu\bar{H} \Rightarrow \begin{cases} H_x = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ H_y = \frac{-1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{-1}{j\omega\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(E_x^+(0)e^{-\gamma z}\right) = \frac{\gamma}{j\omega\mu}\cdot E_x^+(0)\cdot e^{-\gamma z} = \frac{\gamma}{j\omega\mu}E_x^+(z) = H_y^+(z)$$

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = \boxed{\frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta} \quad [\Omega]$$

complessa! Potrebbe esserci sfasamento tra E e H. Questo sfasamento è dovuto alla presenza / consideraz. delle perdite

$$E_x^+(z) = E_x^+(0)e^{-\gamma z} \underset{\underset{\gamma = \alpha + j\beta}{\uparrow}}{=} E_x^+(0)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

(ritorno nel dom. del tempo)

$$\hookrightarrow \operatorname{Re}\big[\underset{\underset{\text{fasore}}{\uparrow}}{E_x^+(z)}e^{j\omega t}\big] = \operatorname{Re}\big[E_x^+(0)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\cdot e^{j\omega t}\big] = \operatorname{Re}\big[\underset{\underset{\text{modulo del fasore}}{\uparrow}}{|E_x^+(0)|}e^{j\varphi}\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{-j\beta z}\cdot e^{j\omega t}\big] = |E_x^+(0)|e^{-\alpha z}\cdot\cos(\omega t - \beta z + \varphi_E)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x^+(z,t) = |E_x^+(0)|e^{-\alpha z}\cdot\cos(\omega t - \beta z + \varphi_E)}$$

α: cost. di attenuaz. $\neq 0$ nei mezzi con perdita $[1/m]$ o $[\frac{Np}{m}]$

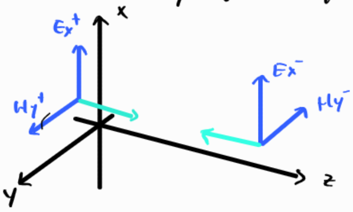
β: cost. di fase $= \frac{2\pi}{\lambda}$ $[1/m]$ o $[\frac{rad}{m}]$

$\nabla^2 \bar{E} = \gamma^2 \bar{E}$ con $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + J\omega\mu\sigma$

$$\begin{cases} E_x(z) = E_x^+(z) + E_x^-(z) = E_x(0)e^{-\gamma z} + E_x^+(0)e^{+\gamma z} \\ H_y(z) = \frac{E_x^+(z)}{\eta} \underset{\uparrow}{-} \frac{E_x^-(z)}{\eta} \end{cases}$$

Il segno meno serve per far valere la regola della mano destra

$\left(\frac{E_x}{H_y} = \eta \text{, con } \eta = \frac{J\omega\mu}{\gamma}\right)$



mezzi ideali

- mezzi ideali => senza perdite => $\sigma = \emptyset$

- ε e μ reali

$$\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow \gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon} \Rightarrow \underset{\uparrow}{\gamma} = +J\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = +J2\pi\nu\sqrt{\mu\varepsilon} = +J2\pi\nu\cdot\frac{1}{c} = +J2\pi\frac{1}{\lambda} \overset{\overset{\beta = 2\pi/\lambda}{\downarrow}}{=} +J\beta \Rightarrow \gamma = J\beta \text{ nei mezzi ideali}$$

prendo il segno + perchè $E_x^+(z) = E_x^+(0)e^{-\gamma z}$. Se γ fosse co avrei $E_x^+(z) = E_x^+(0)e^{\gamma z}$ ma questo equivale a dire un anticipo di fase che non avrebbe senso perchè man mano che mi allontano dalla sorgente ho un ritardo di fase

$\Rightarrow E_x^+(z) = E_x^+(0)e^{-J\beta z}$ se $\sigma = \emptyset$

$$\eta = \frac{\cancel{J\omega}\mu}{\cancel{J\omega}\sqrt{\mu\varepsilon}} \Rightarrow \eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

$\hookrightarrow \frac{E_x^+}{H_y^+} = \eta \Rightarrow$ E e H sono in fase nei mezzi ideali

conduttori

- buon conduttore: $\underset{\underset{|\mathrm{Im}[\gamma^2]|}{\uparrow}}{\omega\mu\sigma} \gg \underset{\underset{|\mathrm{Re}[\gamma^2]|}{\uparrow}}{\omega^2\mu\varepsilon} \Rightarrow \sigma \gg \omega\varepsilon$

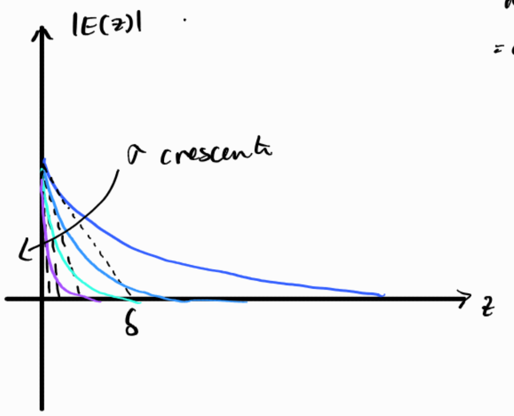
$$\hookrightarrow \gamma^2 \sim J\omega\mu\sigma \Rightarrow \gamma = \sqrt{J}\cdot\sqrt{\omega\mu\sigma} \underset{\uparrow}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega\mu\sigma}\cdot(1+J) = \alpha + J\beta$$

$$\left[\begin{array}{l} z^n = \rho^n[\cos(n\alpha) + J\sin(n\alpha)] \\ z = \alpha + i\beta \\ \text{(de Moivre} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} J = 1\cdot[\cos(\frac{\pi}{2}) + J\sin(\pi/2)] \\ J^{1/2} = 1\cdot[\cos(\pi/4) + J\sin(\pi/4)] = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+J) \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega\mu\sigma}\cdot(1+J) = \alpha + J\beta$ in un buon conduttore

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\pi\nu\mu\sigma}{\cancel{2}}} = \sqrt{\pi\nu\mu\sigma} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\pi\nu\mu\sigma}$$

$$E_x^+(z) = E_x^+(0)e^{-\gamma z} = E_x^+(0)\cdot e^{-(\alpha+J\beta)z} = E_x^+(0)\cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\substack{\text{termine} \\ \text{di attenuaz} \\ = e^{-\frac{1}{1/\alpha}z}}} \cdot \underbrace{e^{-J\beta z}}_{\substack{\text{termine} \\ \text{oscillante} \\ \text{nello spazio}}}$$



$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}$$ spessore pelle

se $\sigma \to \infty$ (caso conduttore ideale)

allora => $\delta \to \emptyset$ => i conduttori sono impenetrabili da onde EM

$$\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/_{v/\nu} = \frac{2\pi\nu}{v} \Rightarrow \frac{2\pi\nu}{v} = \beta \Rightarrow \frac{\omega}{v} = \beta \Rightarrow v = \omega/\beta \overset{\uparrow}{=} \omega\delta$$

$(\delta = \frac{1}{\alpha}$ ma $\alpha = \beta)$

- In un buon conduttore $v <<< c$. Ciò che causa questo rallentamento è il fatto che l'onda cede dell'energia per far scorrere la corrente indotta da essa

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{\pi\sigma\mu\nu}\,(1+j)} \cdot \frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{j\omega\mu + \omega\mu}{2\sqrt{\pi\sigma\mu\nu}} = \frac{\omega\mu(1+j)}{2\sqrt{\pi\sigma\mu\nu}} = (1+j)\cdot\frac{\cancel{2}\pi\nu\mu}{\cancel{2}\sqrt{\pi\sigma\mu\nu}} \Rightarrow \boxed{\eta = (1+j)\sqrt{\frac{\pi\nu\mu}{\sigma}}}$$

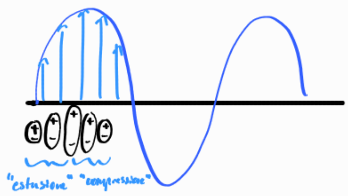
nei conduttori
($\sigma \neq 0$, ho perdite)

$\Rightarrow \measuredangle[\eta] = 45°$

- E e H sono sfasati. Oscillano sempre alla stessa freq.. Rimangono anche ⊥ nello spazio ma sfasati nel tempo

mezzi con perdite (nei dielettrici)

- pensiamo a una molla che oscilla. In presenza di attrito ho delle perdite di energia. L'analogo succede nei dielettrici dove i dipoli indotti si "comprimono" e si "estendono" come molle



$\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

$\bar{D} = (\varepsilon' - j\varepsilon'')\bar{E}$ (nel dom. dei fasori)

↳ segno - indica un ritardo dell'effetto rispetto la causa. (se ho un attrito vedo l'effetto rispetto la causa con un certo ritardo). La presenza di j mi indica lo sfasamento, segno - è il ritardo

$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \Rightarrow Im[\varepsilon] = \varepsilon''$ è il contributo che tiene conto delle perdite

$\Rightarrow$ ε e μ complesse

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma}$$

cmplx

hp. caso particolare σ finita, $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$, e assumiamo perdite solo nel dielettrico => μ reale)

$$\hookrightarrow \gamma^2 = -\omega^2\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'') + j\omega\mu\sigma = -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega^2\mu\varepsilon'' + j\omega\mu\sigma = -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega\mu\underbrace{(\omega\varepsilon'' + \sigma)}_{\sigma_{eq}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma^2 = -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega\mu\sigma_{eq}}$ nei dielettrici (con perdita solo nei dielettrici)

$\boxed{\sigma_{eq} = \omega\varepsilon'' + \sigma}$ conducibilità equivalente

- il termine $\omega\varepsilon''$ tiene appunto conto delle perdite e si "comporta" da conducibilità.
- dipende da ω! => più è grande ω, più oscillano i dipoli, più perdite ho per via dell'attrito

↳ ad alta freq. sono dominanti le perdite nel dielettrico, non nel conduttore

vettore di Poynting (dominio dei fasori)

- la def. $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ nel dominio dei fasori non va più bene
- $\bar{S}$ è il risultato di un prodotto => non è isofrequenziale con $\bar{E}$ e $\bar{H}$

(analogia con correnti e tensione: $v(t) \cdot i(t) = p(t)$ nel tempo
$\frac{1}{2} V \cdot I^* = P$ nei fasori (non è semplicemente $V \cdot I$))

- serve una nuova def. di $\bar{S}$ nel dom. dei fasori: $\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^*$
- dimostreremo che $\bar{S}_{medio} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{S}(t)\, dt = Re[\bar{S}] = \frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H}^*]$

dom. del tempo

densità di potenza media su un periodo

$Re[z] = \frac{1}{2}[z + z^*] = \frac{1}{2}[Re[z] + \cancel{jIm[z]} + Re[z] - \cancel{jIm[z]}] = Re[z]$

notazioni: $\begin{cases} \mathcal{E} = E \text{ nel dom. del tempo} = Re[\underline{\bar{E}} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}\{\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}\} \\ h = H \text{ nel dom. del tempo} = Re[\underbrace{\bar{H}}_{\text{fasori}} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}\{\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t}\} \end{cases}$

nel dom. del tempo:

$$\bar{S} = \bar{\mathcal{E}} \times \bar{h} = \frac{1}{4}\left\{\underline{\bar{E} e^{j\omega t} \times \bar{H} e^{j\omega t}} + \underline{\bar{E} e^{j\omega t} \times \bar{H}^* e^{-j\omega t}} + \underline{\bar{E}^* e^{-j\omega t} \times \bar{H} e^{j\omega t}} + \underline{\bar{E}^* e^{-j\omega t} \times \bar{H}^* e^{-j\omega t}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\underline{\bar{E} \times \bar{H}^*} + \underline{\bar{E}^* \times \bar{H}}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\underline{\bar{E} \times \bar{H} e^{j2\omega t}} + \underline{\bar{E}^* \times \bar{H}^* e^{-j2\omega t}}\right\}$$

$\begin{cases} \bar{A} = \bar{E} \times \bar{H}^* \\ \bar{B} = \bar{E} \times \bar{H} \end{cases}$ => $\bar{S} = \bar{\mathcal{E}} \times \bar{h} = \frac{1}{4}\{\bar{A} + \bar{A}^*\} + \frac{1}{4}\{\bar{B} e^{j2\omega t} + \bar{B}^* e^{-j2\omega t}\}$

$$= \frac{1}{2} Re[\bar{A}] + \frac{1}{2} Re[\bar{B} e^{j2\omega t}]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H}^*]}_{\text{non dipende dal tempo } (\bar{E}, \bar{H} \text{ fasori})} + \frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H} \cdot \underbrace{e^{j2\omega t}}_{}]$$

$Re[e^{j2\omega t}]$ è un coseno

=> $P_m = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\, dt$

cosено mediato su un periodo

$$= \underbrace{\frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H}^*]}_{\text{val. cost., non dipende da } T} + \emptyset$$

$= \frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H}^*]$ => $\boxed{\bar{S}_{medio} = \frac{1}{2} Re[\bar{E} \times \bar{H}^*]}$ nei fasori

flusso di densità di potenza

- considero E_x, H_y (onda piana uniforme)

$$\begin{cases} E_x(z) = E_x^+(0) e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + E_x^-(0) e^{\alpha z} \cdot e^{j\beta z} \\ H_y(z) = \frac{E_x^+(0)}{\eta} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} - \frac{E_x^-(0)}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \end{cases}$$

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2} \Re[\bar{E}\times\bar{H}^*] \underset{\substack{\uparrow \\ E_x \perp H_y}}{=} \frac{1}{2}\Re[E_x(z)\cdot H_y^*(z)]\,\hat{u}_z$$

$$H_y^*(z) = \frac{E_x^+(0)^*}{\eta^*} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} - \frac{E_x^-(0)^*}{\eta^*} e^{\alpha z} e^{-j\beta z} \qquad \left(H_y = \frac{E_x}{\eta}\,,\ E_x = E_x^+(0)e^{-\alpha z}\cdot e^{-j\beta z} + E_x^-(0)\overset{\substack{\text{onda regressiva, } z<0 \\ \downarrow}}{e^{\alpha z}}\cdot e^{j\beta z}\right)$$

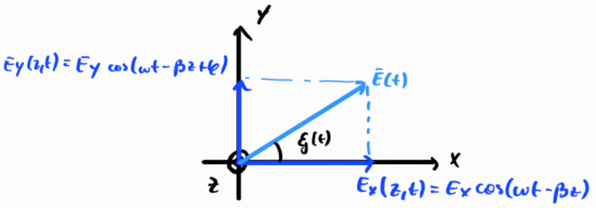
si ricava che:

$$\Rightarrow \bar{S}_m = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{|E_x^+(0)|^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cdot\cos\varphi_\eta}_{\substack{\text{densità di pot. media} \\ \text{trasportata dall'onda} \\ \underline{\text{progressiva}}}} - \underbrace{\frac{|E_x^-(0)|^2}{|\eta|}e^{2\alpha z}\cdot\cos\varphi_\eta}_{\substack{\text{densità pot. media} \\ \text{trasportata dall'onda} \\ \underline{\text{regressiva}}\text{ (ergo il} \\ \text{segno negativo)}}} - 2\underbrace{\frac{|E_x^+(0)|\cdot|E_x^-(0)|}{|\eta|}\cdot\sin(2\beta z + \varphi_{E_x^-(0)} - \varphi_{E_x^+(0)})\cdot\sin\varphi_\eta}_{\substack{\text{termine di }\underline{\text{accoppiamento}}\text{ tra le} \\ \text{due onde (densità di potenza} \\ \text{dovuta all'accoppiamento)}}}\right]\cdot\hat{u}_z$$

- il termine di accoppiamento $\exists \Leftrightarrow \exists E^+, \exists E^-$ e il $\underbrace{\text{mezzo ha perdite}}_{\substack{\text{se così non fosse,} \\ \text{avrei } \eta \text{ reale} \\ \hookrightarrow \varphi_\eta = 0 \Rightarrow \sin\varphi_\eta = 0}}$

polarizzaz. onde TEM

hp. propagaz. come $\bar{i}_z$



- le onde possono essere sfasate tra loro
- ci poniamo in $z = 0$ per comodità

nel dominio del tempo:

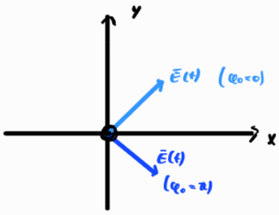
$$\begin{cases} E_x(0,t) = E_x \cos(\omega t) \\ E_y(0,t) = E_y \cos(\omega t) \end{cases}$$

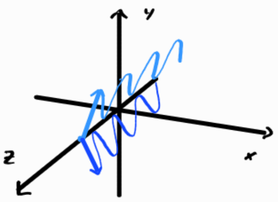
caso ① $\varphi_0 = 0, \pi$ => polarizzaz. lineare : descrive una linea nel tempo sul piano x,y

se $\varphi_0 = 0 \Rightarrow |\bar{E}(t)|^2 = E_x^2 \cos^2(\omega t) + E_y^2 \cos^2(\omega t) = \underbrace{(E_x^2 + E_y^2)\cos^2(\omega t)}_{\text{dipende da } t}$

$\xi(t) = \arctan\left(\frac{E_y \cancel{\cos(\omega t)}}{E_x \cancel{\cos(\omega t)}}\right) \Rightarrow \xi(t) = \arctan(E_y/E_x)$ cost., non dipende da t

se ho $\varphi_0 = \pi$: $\xi(t) = \arctan(E_y/E_x)$



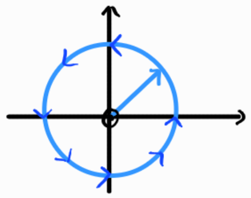


caso ② $\varphi_0 = \pm \pi/2$ => polarizzaz. circolare : descrive una circonferenza nel tempo sul piano x,y

- consideriamo $E_x = E_y$ per semplicità

$|\bar{E}(t)|^2 = E_x^2 \cos^2(\omega t) + E_y^2 \cos(\omega t \pm \pi/2) = E_x^2 \cos^2(\omega t) + E_x^2 \sin^2(\omega t) = E_x^2$ cost., non dipende da t

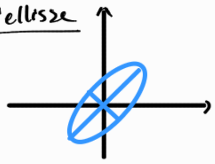
$\xi(t) = \arctan\left(\frac{\mp E_x \sin(\omega t)}{E_x \cos(\omega t)}\right) = \underbrace{\mp \omega t}_{\text{dipende da } t}$

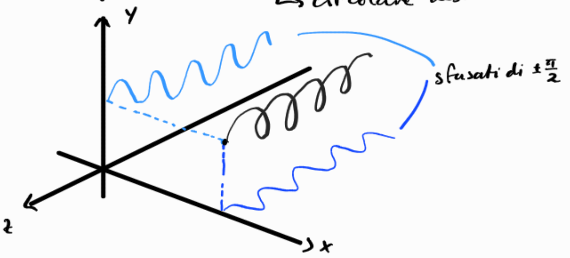


$\varphi_0 = +\pi/2 \Rightarrow \xi(t) = -\omega t$ (senso orario)
↳ circolare sinistra

$\varphi_0 = -\pi/2 \Rightarrow \xi(t) = \omega t$ (senso anti-orario)
↳ circolare destra

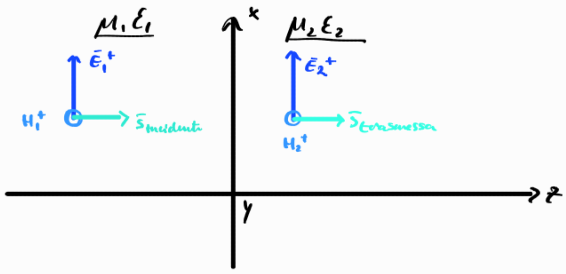
- la rotaz. segue il verso della regola della mano destra
- nel caso gen. $E_x \neq E_y$ descrivono un'ellisse (avrà quindi anche un orientamento)





Incidenza normale

- incidenza normale di un'onda TEM piana, su una discontinuità piana dielettrica



- dominio dei fasori
- hp. mezzi ideali => ε, μ reali, $\sigma = 0$

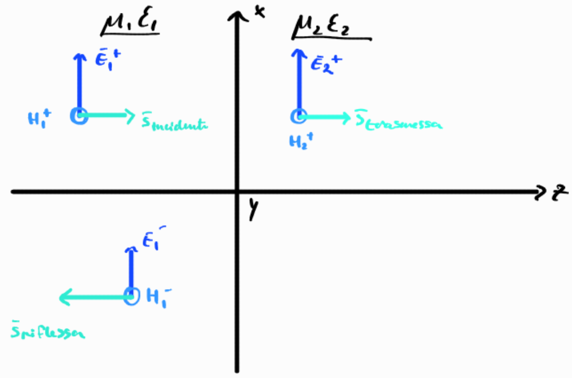
$E_1^+ = E_2^+$ (si deve conservare la component. tangent.)

tuttavia so anche che $H_1^+ = H_2^+$

$$\begin{cases} E_1^+ = E_2^+ \\ H_1^+ = H_2^+ \\ H_1^+ = \frac{E_1^+}{\eta_1} \\ H_2^+ = \frac{E_2^+}{\eta_2} \end{cases} \quad \text{dove } \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \ \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \Rightarrow \eta_1 \neq \eta_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_1^+}{\eta_1} = \frac{E_2^+}{\eta_2} = \frac{E_1^+}{\eta_2} \Rightarrow \eta_1 = \eta_2 \quad \underline{\text{impossibile}}\ !$$

$\hookrightarrow$ introduco un'onda riflessa per far tornare le cose



<u>mezzo 1</u>

<u>incidente</u>
$$\begin{cases} E_1^+(z) = E_1^+(0)\, e^{-\gamma_1 z} = E_1^+(0)\, e^{-j\beta_1 z} \\ H_1^+(z) = H_1^+(0)\, e^{-\gamma_1 z} = H_1^+(0)\, e^{-j\beta_1 z} = \dfrac{E_1^+(0)}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \end{cases}$$

$$\left(\gamma_1 = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta\right)$$

$$\left(\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\mu/\varepsilon}\right)$$

<u>riflessa</u>
$$\begin{cases} E_1^-(z) = E_1^-(0)\, e^{\gamma_1 z} = E_1^-(0)\, e^{+j\beta_1 z} \\ H_1^-(z) = -\dfrac{E_1^-(0)}{\eta_1} e^{+j\beta_1 z} \end{cases}$$

<u>trasmessa</u>
$$\begin{cases} E_2^+(z) = E_2^+(0)\, e^{-\gamma_2 z} = E_2^+(0)\, e^{-j\beta_2 z} \\ H_2^+(z) = \dfrac{E_2^+(0)}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \end{cases}$$

(cambia il mezzo)

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1^+(0) + E_1^-(0) = E_2^+(0) \\ H_1^+(0) + H_1^-(0) = H_2^+(0) \end{cases}$$

si devono conservare le comp. tangenti di E e H (condiz. al contorno)

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1^+(0) + E_1^-(0) = E_2^+(0) \\ \dfrac{E_1^+(0)}{\eta_1} - \dfrac{E_1^-(0)}{\eta_1} = \dfrac{E_2^+(0)}{\eta_2} \end{cases} \Rightarrow \Gamma(0) = \frac{E_1^-(0)}{E_1^+(0)} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

coeff. di riflessione $\underline{(\leq 1)}$

$$T = \frac{E_2^+(0)}{E_1^+(0)} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

coeff. di trasmissione (potrebbe essere ≥ 1)

$\hookrightarrow$ aumenta E non viene compensato da una diminuiz. di B

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tot.}}}{E_1(z)} = E_1^+ + E_1^- = \underbrace{E_1^+(0)e^{-j\beta_1 z}}_{E_1^+(z)} + \underbrace{E_1^-(0)e^{j\beta_1 z}}_{E_1^-(z)} = E_1^+(0)\left(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma(0)e^{j\beta_1 z}\right)$$

(<u>diretto come $\hat{u}_x$</u>)

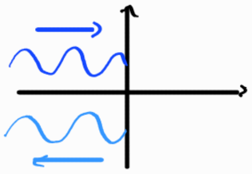
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tot.}}}{H_1(z)} = H_1^+ + H_1^- = \underbrace{\frac{E_1^+(0)}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}}_{H_1^+(z)} - \underbrace{\frac{E_1^+(0)\Gamma(0)}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}}_{H_1^-(z)} = \frac{E_1^+(0)}{\eta_1}\left(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma(0)e^{j\beta_1 z}\right)$$

(<u>diretto come $\hat{u}_y$</u>)

$$E_2(z) = E_1^+(0)\, T e^{-j\beta_2 z}$$
$$H_2(z) = \frac{E_1^+(0)}{\eta_2} \cdot T e^{-j\beta_2 z}$$

$$\Gamma(z) = \frac{E_1^-(z)}{E_1^+(z)} = \frac{E_1^-(0)e^{+j\beta_1 z}}{E_1^+(0)e^{-j\beta_1 z}} = \frac{\cancel{E_1^+(0)}\Gamma(0)e^{j\beta_1 z}}{\cancel{E_1^+(0)}\, e^{-j\beta_1 z}} = \Gamma(0)e^{j2\beta_1 z} = \Gamma(z)$$

$\hookrightarrow$ mezzo 1, $z<0$



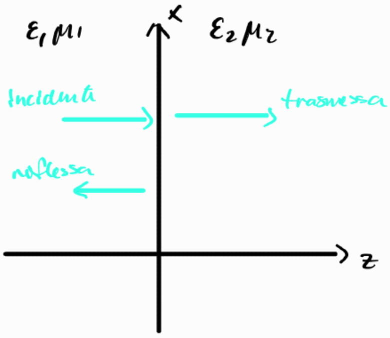
il termine 2 compare all'exp. perchè si "sommano" le velocità in verso opposto e quindi si sfasano con doppia della velocità delle singole onde

impedenza d'onda:
$$\mathcal{Z}(z) = \frac{E_1(z)}{H_1(z)} = \eta_1 \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$

$\uparrow$

attenzione! <u>NON</u> è $\eta = \dfrac{E^\pm}{H^\pm}$

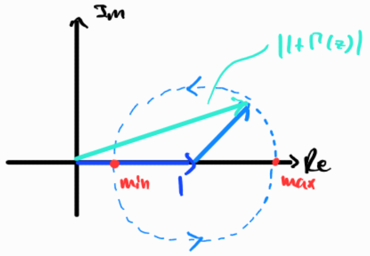
caso ① mezzo 1, 2 ideali ($\sigma = 0$)



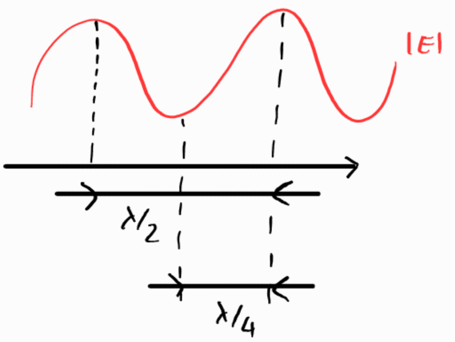
$$E_1(z) = E_1^+(z) + E_1^-(z) = E_1^+(z)\left(1+\Gamma(z)\right) = E_1^+(z)\left(1+\Gamma(0)e^{j2\beta_1 z}\right)$$

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{E_1^-(z)}{E_1^+(z)} = \Gamma(0)e^{2j\beta_1 z}}$$

$$|E_1(z)| = |E_1^+(z)|\cdot\left|1+\Gamma(0)e^{j2\beta_1 z}\right| = \underbrace{\left|E_1^+(0)e^{-j\beta_1 z}\right|}_{|E_1^+(0)| = cost.}\cdot\left|1+\Gamma(0)\,e^{j2\beta_1 z}\right|$$



$$\overbrace{2\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_1}}_{\beta}\Delta z}^{\Delta fase} = 2\pi \Rightarrow \Delta z = \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{distanza tra picchi}$$



$$\cancel{H_1(z) = \frac{E_1(z)}{\eta_1}}$$ NO! vale solo: $H_1^{\pm}(z) = \frac{E_1^{\pm}(z)}{\eta_1}$

$$|H_1(z)| = \underbrace{\frac{E_1^+(z)}{\eta_1}}_{H_1^+} - \underbrace{\frac{E_1^-(z)}{\eta_1}}_{H^-} = \frac{E_1^+(z)}{\eta_1}\left(1-\Gamma(z)\right) = \frac{E_1^+(z)}{\eta_1}\left(1-\Gamma(0)e^{j2\beta_1 z}\right)$$

↑ i max. di H si trovano in corrispondenza dei minimi di E, e viceversa

$$\bar{S}_m^+ = \bar{S}_{incidente} = \frac{1}{2}\frac{|E_1^+(0)|^2}{\eta_1}\hat{u}_z \qquad \left(\bar{S}_m = \frac{1}{2}Re\left[E_x(z)\cdot H_y^*(z)\right]\hat{u}_z\right)$$

$$\bar{S}_m^- = \bar{S}_{riflessa} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|E_1^-(0)|^2}{\eta_1}\hat{u}_z = -\frac{1}{2}\cdot\frac{|E_1^+(0)|}{\eta_1}|\Gamma(0)|^2\,\hat{u}_z = -\bar{S}_{incidente}\,|\Gamma(0)|^2$$

$$\bar{S}_{trasmessa} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|E_2^+(0)|^2}{\eta_2} = \frac{1}{2}\,\frac{|E_1^+(0)|\cdot|T|^2}{\eta_2}\hat{u}_z = \bar{S}_{incidente}\cdot|T|^2$$

$\Rightarrow$ $S_{incidente} + S_{riflessa} = S_{trasmessa}$

$\Rightarrow$ $S_{incidente} - S_{incidente}|\Gamma(0)|^2 = S_{incidente}|T|^2$

$\Rightarrow$ $S_{incidente}\left(1-|\Gamma(0)|^2\right) = S_{trasmessa}$ $\qquad \left(|T|^2 = 1-|\Gamma(0)|^2\right)$

caso ② mezzo 2 non ideale

- considero il mezzo 1 ideale. Per un mezzo non ideale: $\gamma = \alpha + i\beta$ $\Rightarrow$ ho un termine $e^{\alpha z}$. Considerando che il mezzo 1 si trova per $z<0$, e la sorgente dell'onda incidente proviene da $-\infty$, avrei che $e^{-\alpha z}$ diverge $\Rightarrow$ considero il mezzo 1 ideale

- $\sigma_2 \neq 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - j\varepsilon_2''$, $\mu_2 = \mu_2' - j\mu_2''$

$$\begin{cases} \eta_2 = \dfrac{j\omega\mu_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 = \sqrt{-\omega^2\mu_2\varepsilon_2 + j\omega\mu_2\sigma_2} = \sqrt{-\omega^2(\mu_2'-j\mu_2'')(\varepsilon_2'-j\varepsilon_2'') + j\omega(\mu_2'-j\mu_2'')\,\sigma_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega(\mu_2' - j\mu_2'')}{\sigma_2 + j\omega(\varepsilon_2' - j\varepsilon_2'')}}}$$

- sia γ che η sono complessi

$$\begin{cases} \Gamma(0) = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ T = \dfrac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma(0) \end{cases}$$

> $\Gamma(0), T$ complessi
>
> ↳ l'onda trasmessa e riflessa non sono più in fase con l'onda incidente

$$\begin{cases} E_2^+(z) = E_1^+(0)\,T\,e^{-\alpha_2 z}\,e^{-j\beta_2 z} \\ H_2^+(z) = \dfrac{E_1^+(0)\,T}{\eta_2}\,e^{-\alpha_2 z}\cdot e^{-j\beta_2 z} \end{cases}$$

$$\bar{S}_m = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_x(z) \times H_y^*(z)\right]\hat{u}_z$$

$|E_1^+(0)|^2$ reali

$$\bar{S}_{trasmessa} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{T E_1^+(0) e^{-\alpha_2 z}\cdot \cancel{e^{-j\beta_2 z}} \cdot \frac{T^* E_1^+(0)^*}{\eta_2^*}\, e^{-\alpha_2 z}\cdot \cancel{e^{j\beta_2 z}}\right\}\hat{u}_z$$

$|T|^2$

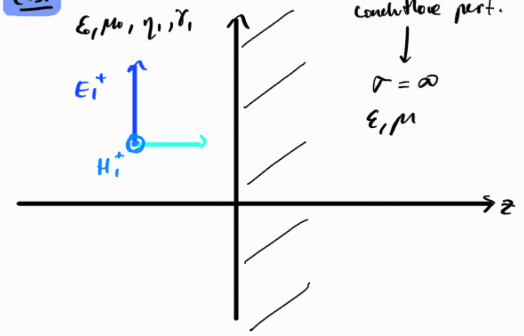
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{|E_1^+(0)|^2}{|T|^2}\cdot e^{-2\alpha_2 z}\cdot \underbrace{\frac{1}{|\eta_2|}\cos\theta_{\eta_2}}_{\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\eta_2^*}\right]}\cdot\hat{u}_z$$

$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$

attenua con $e^{-2\alpha}$ — attenua con $e^{-\alpha}$ — attenua con $e^{-\alpha}$

e.s.

$\boxed{E(z)?\ H(z)?}$



$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = 0\ [\Omega] \qquad (\sigma \to \infty)$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\ [\Omega]$$

$$\Gamma(0) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -1$$ ⇒ riflessione totale ⇒ $|E_1^-(0)| = |E_1^+(0)|$ ⇒ $E_1^+(0) = -E_1^-(0)$

- il campo tangente si conserva
- il campo nel conduttore è 0

$\Rightarrow$ per forza $\exists$ un'onda riflessa t.c. $\underbrace{E_1^-(0) + E_1^+(0)}_{E_{1t}} = \underbrace{0 \quad (= E_1^+ \text{ trasmessa})}_{E_{2t}}$

$$\Rightarrow E(z) = E_1^+(z) + E_1^-(z) = E_1^+(0)e^{-j\beta_1 z} + E_1^-(0)e^{j\beta_1 z}$$

$$= E_1^+(0)\,e^{-j\beta_1 z} + E_1^+(0)\underbrace{\Gamma(0)}_{-1}e^{j\beta_1 z}$$

$$= E_1^+(0)\cdot\underbrace{\left(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}\right)}_{j2\sin(\beta_1 z)}$$

$\Rightarrow |E(z)| = 2\,|E_1^+(0)|\cdot|\sin(\beta z)|$

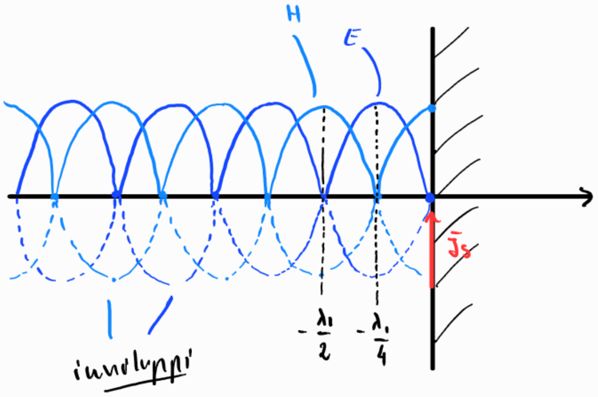
$\Rightarrow$ max per $\beta z = \frac{2\pi}{\lambda_1} z = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \frac{-\lambda_1}{4}$

ampiezza doppia di E_1 ma nulla di H!

$\Rightarrow |E_{1\,max}| = 2\,|E_1^+(0)|$ onda riflessa e incidente danno vita a interferenza costruttiva

$\Rightarrow |E_{1\,min}| = 0$ onda incidente e riflessa danno vita a interferenza distruttiva

$$|H(z)| = |H_1^+(z) + H_1^-(z)| = \left|\frac{E_1^+(z)}{\eta_1} - \frac{E_1^-(z)}{\eta_1}\right| = \frac{|E_1^+(0)|}{\eta_1}\cdot\underbrace{\left|e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}\right|}_{2\cos(\beta_1 z)} = \frac{|E_1^+(0)|}{\eta_1}\cdot 2\,|\cos(\beta_1 z)|$$

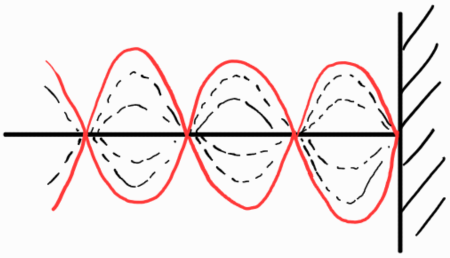


- $\overset{0}{E_{1t}} = \overset{0}{E_{2t}}$ è soddisfatto
- tuttavia all'interfaccia $|H_1(0)| \neq 0 \neq |H_2(0)|$. Come risolvo questo prob.?

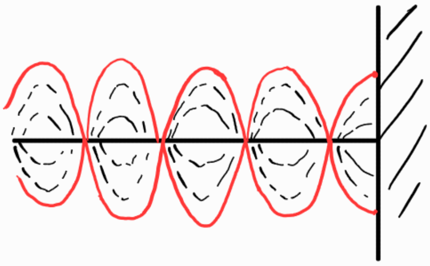
$\Rightarrow$ $\exists$ una corrente sup. di carica $\bar{J}_S$! $(H_{2t} - H_{1t} = J_S)$

- inviluppo: andamento dei picchi nel tempo

(onda viaggiante)

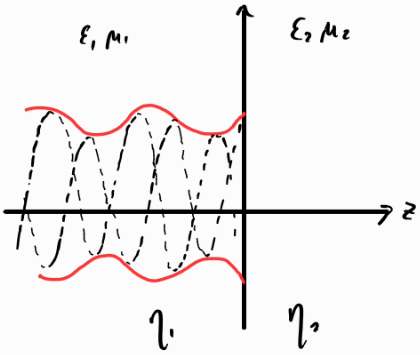


$(\bar{E})$ puramente stazionario



$(\bar{H})$ puramente stazionario

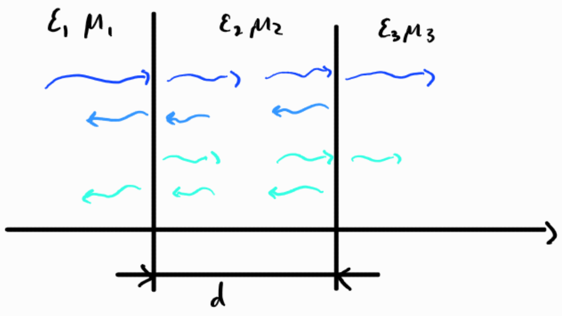
caso generale di un conduttore non ideale : $\sigma \neq 0$ <u>finito</u>



$$|\Gamma(0)| = \left|\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\right| < 1$$

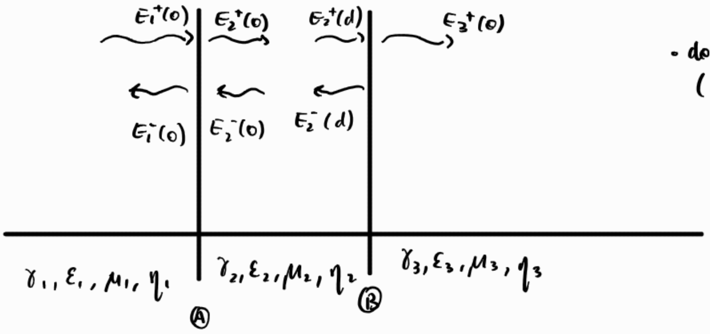
=> onda riflessa ha modulo minore dell'incidente

↳ campo tot. non è più <u>puramente</u> stazionario
ma solo stazionario



- tutte le componenti riflesse danno vita a loro volta ad altre componenti riflesse / trasmesse, sempre più deboli

considriamo:



- dove ogni onda è la somma dei rispettivi contributi (e.s. $E_2^+(0)$ somma di tutti i contributi progressivi in 0 nel mezzo 2)

interfaccia Ⓑ: $E_2^-(d) + E_2^+(d) = E_3^+(d)$ con $\frac{E_2^-(d)}{E_2^+(d)} = \Gamma_B = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$, $\frac{E_3^+(d)}{E_2^+(d)} = T_B = \frac{2\eta_3}{\eta_3 + \eta_2} = 1 + \Gamma_B$

interfaccia Ⓐ: $E_1^+(0) + E_1^-(0) = E_2^+(0) + E_2^-(0)$

attenzione: $\cancel{\Gamma_A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$ NO! questa espressione non tiene conto del contributo $E_2^-(0)$

$$E_2^-(0) = \underbrace{E_2^-(d) \cdot e^{-\gamma_2 d}}_{\substack{E_2^-(0) = E_2^-(d) \\ \text{propagata fino} \\ x=0 \quad (d = \Delta z = \\ z_2 - z_1 = 0 - d = -d)}} = E_2^+(d) \cdot \Gamma_B \cdot e^{-\gamma_2 d} = \underbrace{E_2^+(0) \cdot e^{-\gamma_2 d}}_{\substack{E_2^+(d) = E_2^+(0) \\ \text{propagata fino} \\ \text{a } x = d \ (d \\ = \Delta z = d - 0)}} \cdot \Gamma_B \cdot e^{-\gamma_2 d} = E_2^+(0) \cdot \underbrace{\Gamma_B(0)}_{= \Gamma_B e^{-2\gamma_2 d}\ (= \Gamma(z))}$$

(esprimo tutto in funz. di $E_2^+(0)$ - potrei anche fare tutto in funz. di qualcos' altro, è puramente arbitrario)

$$\begin{cases} E_1^+(0)(1 + \Gamma_A) = E_2^+(0)\left(1 + \Gamma_B e^{-2\gamma_2 d}\right) & ① \ (E) \\ \frac{E_1^+(0)}{\eta_1}(1 - \Gamma_A) = \frac{E_2^+(0)}{\eta_2}\left(1 - \Gamma_B e^{-2\gamma_2 d}\right) & ② \ (H) \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{①}{②} \Rightarrow \eta_1 \frac{1 + \Gamma_A}{1 - \Gamma_A} = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_B(0)}{1 - \Gamma_B(0)}$ z_{2A} impedenza d'onda

$z_{2A} = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_B(0)}{1 - \Gamma_B(0)}$

mezzo 2 interfaccia A

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_A = \frac{z_{2A} - \eta_1}{z_{2A} + \eta_1}}$$

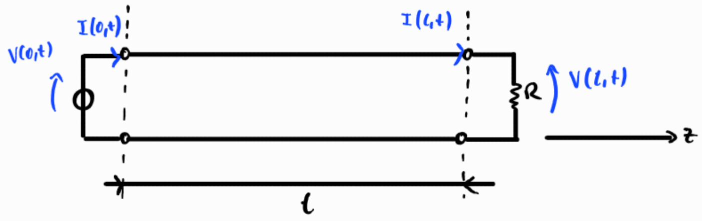
$\Rightarrow E_1^+(0)(1 + \Gamma_A) = E_2^+(0)(1 + \Gamma_B(0))$

$\Rightarrow E_2^+(0) = E_1^+(0) \frac{1 + \Gamma_A}{1 + \Gamma_B(0)}$

ho trovato $E_2^+(0)$ in funz. di $E_1^+(0)$ (che conosco), $E_1^-(0)$ pure lo conosco (è $= E_1^+(0) \cdot \Gamma_A$), $E_2^-(0)$ l'ho trovato ($= E_2^+(0) \cdot \Gamma_B(0)$)

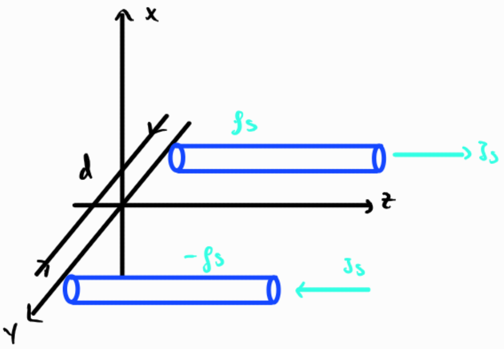
↳ riesco a trovare tutto

linee di trasmissione

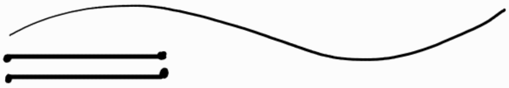


$$\begin{cases} V(0,t) = V(l,t) \\ I(0,t) = I(l,t) \end{cases}$$ idealmente (ragionevole se $l \ll \lambda$)

↳ se l paragonabile a λ, o addirittura $l \gg \lambda$ questo non vale più!

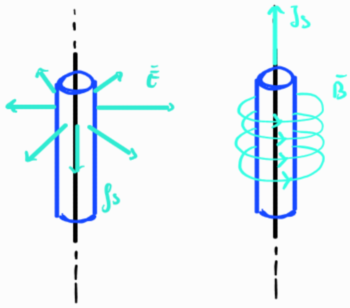


hp: $d \ll \lambda$



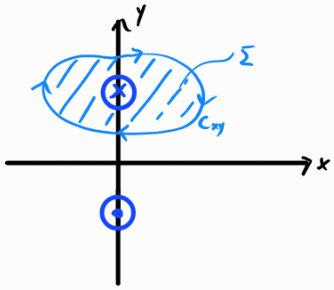
$\Rightarrow$ le componenti J_s e ρ_s variano "lentamente" con z ($\sim$ costanti)

sappiamo anche che:



$\Rightarrow$ per cui H_z e $E_z = 0$

considerando adesso il piano xy:



$$\int_{C_{xy}} \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma} \mu \bar{H}\cdot\hat{u}_n d\Sigma \qquad \text{tuttavia} \quad \overset{\text{nessuna componente lungo } z}{\underset{\hat{u}_n \equiv \hat{u}_z}{\bar{H}\cdot\hat{u}_n}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_{xy}} \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0$$

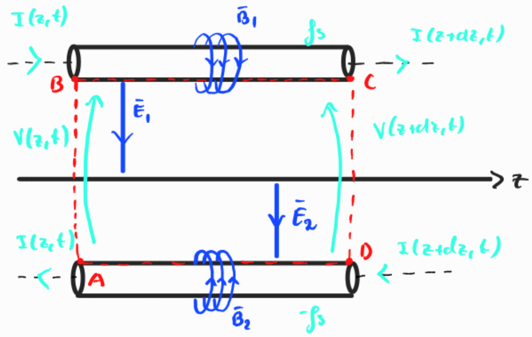
- troviamo che in regime <u>tempo-variante</u> il $\underbrace{\text{campo } \bar{E} \text{ è irrotazionale}}_{(\text{sul piano xy!})}$!

↳ posso def. una diff. di pot. ΔV

$$V(z,t) = -\int_{l} \bar{E}\cdot d\bar{l}$$

$$\int_{C_{xy}} \bar{H}\cdot d\bar{l} = \varepsilon_0 \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma} \bar{E}\cdot\hat{u}_n d\Sigma}}_{0 \ (E_z = 0)} + \iint_{\Sigma} \bar{J}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = I(z,t)$$

↳ $\int_{C_{xy}} \bar{H}\cdot d\bar{l} = I(z,t)$



$$\underbrace{\int_{C_{\Delta z}} \bar{E}\cdot d\bar{l}}_{} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{\Delta z}} \bar{H}\cdot\hat{u}_n d\Sigma$$

$$\underbrace{-V(z,t)}_{\text{integrale su AB}} + \underbrace{0}_{\text{su BC}} + \underbrace{V(z+dz,t)}_{\text{su CD}} + \underbrace{0}_{\text{su DA}}$$

$$\Rightarrow \quad V(z+dz,t) - V(z,t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{\Delta z}} \bar{H}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{\Delta z}} \bar{B}\cdot\hat{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\Sigma_{\Delta z}}(\bar{B})$$

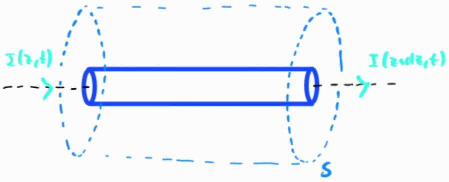
ma sappiamo che: $\Phi_{\Sigma_{\Delta z}}(\bar{B}) = \underset{\uparrow}{L} dz \cdot I(z,t)$ $\qquad \left(L = \dfrac{\Phi_{\Sigma_{\Delta z}}(\bar{B})}{I(z,t)} \right)$

induttanza per unità di lunghezza [H/m]

$$\Rightarrow \quad V(z+dz,t) - V(z,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[L\, dz \cdot I(z,t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V(z+dz,t) - V(z,t)}{dz} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[L \cdot I(z,t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \cdot \frac{\partial I(z,t)}{\partial t}}$$



$$\iint_S \bar{J} \cdot \hat{u}_n \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \quad I(z+dz,t) - I(z,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[q(z,t) \cdot dz\right] \quad \underline{\neq 0}$$

cioè stiamo consentendo che ci sia un accumulo o perdita di carica => <u>NON</u> c'è la conservaz. di carica

↳ correnti entranti ≠ correnti uscenti

$$\Rightarrow \quad \frac{I(z+dz,t) - I(z,t)}{dz} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[q(z,t)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial q(z,t)}{\partial t}$$

$$q(z,t) = \underset{\uparrow \text{ sarà } [F/m]}{C}\, V(z,t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C\, \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}}$$

dominio del tempo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \dfrac{\partial I(z,t)}{\partial t} & ① \\ \dfrac{\partial I(z,t)}{\partial t} = -C \dfrac{\partial V(z,t)}{\partial t} & ② \end{cases}$$

-> derivo la ① rispetto z

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} = \underbrace{-L \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial I(z,t)}{\partial z}\right]}_{\text{Scambio ordine di integraz.}} \overset{②}{=} LC \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} = LC \dfrac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} = LC \dfrac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

equazioni di telegrafi

analogamente trovo: $\dfrac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} = LC \dfrac{\partial I(z,t)}{\partial t'}$

- le sol. dell eq. di telegrafi mi danno 2 onde di tensione e 2 di corrente (regressiva e progressiva)

$$\begin{cases} V(z,t) = V^+(t - z/v) + V^-(t + z/v) \\ I(z,t) = I^+(t - z/v) + I^-(t - z/v) \end{cases}$$

allora $V(z,t)$, $I(z,t)$ rispettano l'eq. di telegrafi a patto che:

$$v^2 = \frac{1}{LC} \qquad\qquad I = C/s = 1$$

$$LC = \left[\frac{H}{m}\right]\cdot\left[\frac{F}{m}\right] = \left[\frac{\cancel{V}\cdot s}{A\cdot m}\right]\cdot\left[\frac{C}{\cancel{V}\cdot m}\right] = \frac{s^2}{m^2} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; [m/s] \text{ è eff. una vel.}$$

$[L] = \left[\frac{V\cdot s}{A}\right]$; $[C] = \left[\frac{C}{V}\right]$ $\quad [A] = [C/s]$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

$$\Rightarrow LC = \mu \varepsilon$$

solo per linee TEM!!!

$$Z_c = \frac{V^+(z,t)}{I^+(z,t)}$$ impedenza caratteristica della linea

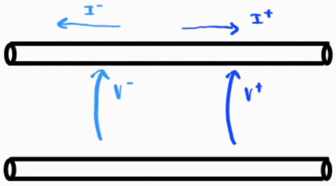
$$\frac{\partial V^+(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I^+(z,t)}{\partial t}$$

$\Rightarrow V^+(z,t) = V(t - z/v)$; $I^+(z,t) = I(t - z/v)$ $\Rightarrow -\frac{1}{v} \cdot V^{+\prime} = -L \cdot \frac{\partial I^+}{\partial t} \underset{\text{integro in } dt}{\Rightarrow} -\frac{1}{v} V^+ = -L I^+ + \underset{\substack{\text{non mi interessa} \\ \text{(è una componente statica)}}}{\cancel{c}} \Rightarrow I(t - z/v) = \frac{1}{vL} \cdot V(t - z/v)$

$$\hookrightarrow \frac{V^+}{I^+} = Lv = L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_c = \frac{V^+}{I^+} = \sqrt{\frac{L}{C}} \;[\Omega]$$ reale

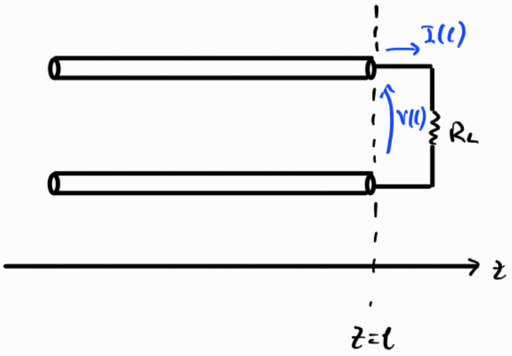
↳ siamo nel dom. del tempo, non potrebbe esser diversamente

attenzione: non è una resistenza ohmica, cioè non comporta una perdita di potenza



nel caso di onde regressive: $\frac{1}{v} V^{-\prime} = -L \frac{\partial I^-}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{v} V^- = -L I^- \Rightarrow \frac{V^-}{I^-} = -Lv$

$$\Rightarrow \frac{V^-(t + z/v)}{I^-(t + z/v)} = -Z_c$$



(per un certo t fissato, la dipendenza dal tempo è sottointesa cioè scrivo $V(z,t)$ come $V(z)$)

- $V(l) = R_L \cdot I(l)$ (la legge di Ohm vale sempre e comunque su R_L)
- $V(l) = V^+(l) + V^-(l)$
- $I(l) = I^+(l) + I^-(l) = \frac{V^+(l)}{z_c} - \frac{V^-(l)}{z_c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V^+(l) + V^-(l) = R_L\left(I^+(l) + I^-(l)\right) \\ V^+(l) + V^-(l) = z_c\left(I^+(l) - I^-(l)\right) \end{cases}$$

caso ① $R_L = z_c \Rightarrow$ carico adattato

$$\Rightarrow \quad \cancel{I^+(l)} + I^-(l) = \cancel{I^+(l)} - I^-(l) \Rightarrow \underline{I^-(l) = 0}$$

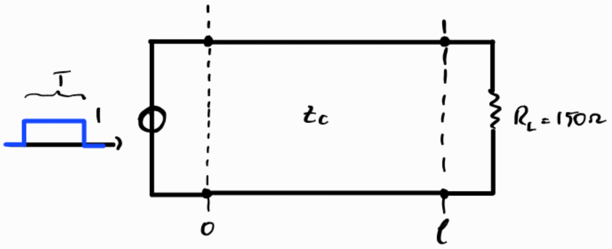
ne segue che anche $\underline{V^-(l) = 0}$ (non ho componenti riflesse)

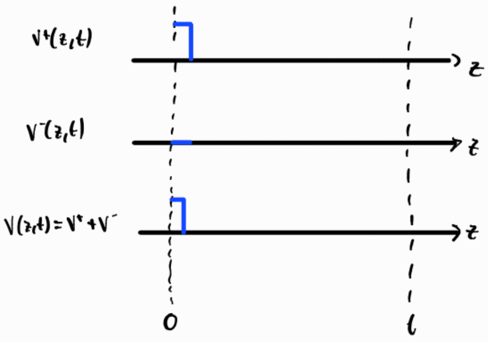
caso ② $R_L \neq z_c$

$$\text{def.} \quad \Gamma_L = \frac{V^-(z,t)}{V^+(z,t)}$$

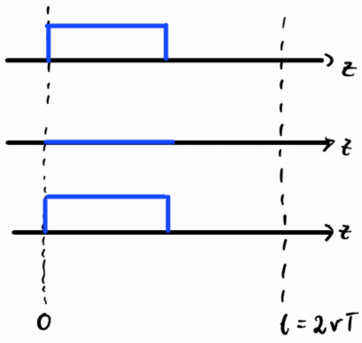
$$\Rightarrow \begin{cases} V^+(l) + V^-(l) = R_L\left(I^+(l) + I^-(l)\right) \\ V^+(l) + V^-(l) = z_c\left(I^+(l) - I^-(l)\right) \end{cases} \Rightarrow z_c I^+ - z_c I^- = R_L I^+ + R_L I^- \Rightarrow \frac{I^-}{I^+} = \frac{z_c - R_L}{z_c + R_L}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} I^- = -\frac{V^-}{z_c} \\ I^+ = \frac{V^+}{z_c} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{V^-(l)}{V^+(l)} = \frac{R_L - z_c}{R_L + z_c}} \qquad (-1 \leq \Gamma_L \leq 1)$$

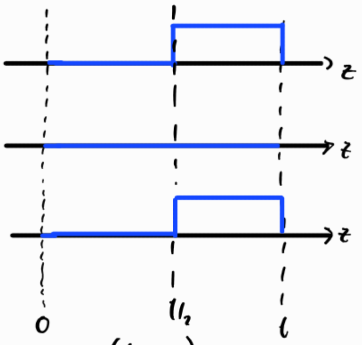




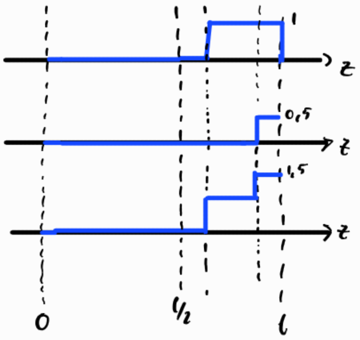
$(t = 0^+)$



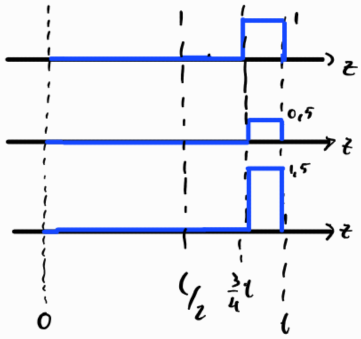
$(t = vT)$



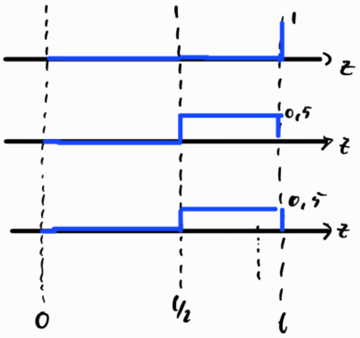
$(t = 2T)$



$t = 2T + \frac{T}{4}$

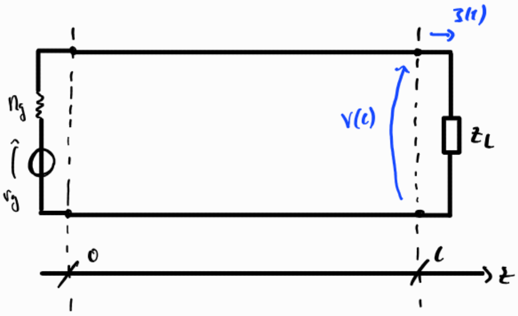


$t = 2T + \frac{T}{2}$



$t = 3T$

regime sinusoidale stazionario (dom. fasori)



$$V_g(t) = V_g \cos(\omega t + \varphi_0) = \mathrm{Re}\left[V_g e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

(tendenzialmente si prende come fase di riferimento) $\varphi_0 = 0$

$\Rightarrow$ eq. dei telegrafi nei fasori

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 V(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, V(z) \\[2ex] \dfrac{d^2 I(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, I(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 LC \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j\omega \cdot \sqrt{LC} = \pm j\omega \cdot \frac{1}{v} = \pm j 2\pi \cancel{f} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot \cancel{f}} = \pm j \frac{2\pi}{\lambda} = \pm j\beta$$

$\Rightarrow$ trovo le sol. delle eq. diff.

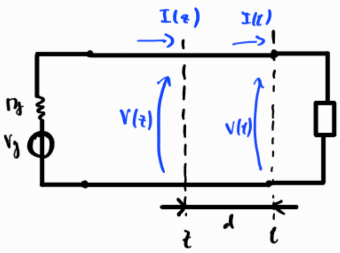
$$\hookrightarrow \begin{cases} V(z) = V^+(0) e^{-j\beta z} + V^-(0) e^{+j\beta z} \\ I(z) = I^+(0) e^{-j\beta z} + I^-(0) e^{+j\beta z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(l) = Z_L \cdot I(l) \\ V(l) = V^+(l) + V^-(l) = Z_c I^+(l) - Z_c I^-(l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{V^-(l)}{V^+(l)} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}}$$

complesso (Z_L complesso)

$\hookrightarrow$ $V^-(l)$ e $V^+(l)$ sfasati



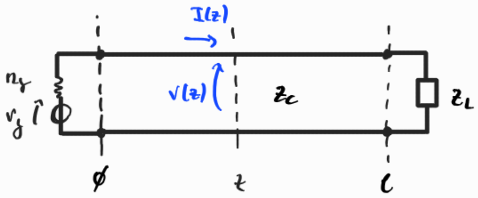
$$\Gamma(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{V^-(0) e^{j\beta z}}{V^+(0) e^{-j\beta z}} = \frac{V^-(l) e^{-j\beta l} \cdot e^{j\beta z}}{V^+(l) e^{j\beta l} \cdot e^{-j\beta z}} \Rightarrow \Gamma(z) = \Gamma_L \cdot e^{-2j\beta(l-z)}$$

Γ_L

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(d) = \Gamma_L \cdot e^{-2j\beta d}} \quad (d = l - z)$$

$$\begin{cases} V(z) = V^+(0) \cdot e^{-j\beta z} + V^-(0) e^{+j\beta z} = V^+(z) + V^-(z) = V^+(z)(1 + \Gamma(d)) \Rightarrow \boxed{V(z) = V^+(0) e^{-j\beta z} \cdot \left[1 + \Gamma(z)\right]} \\ I(z) = I^+(0) e^{-j\beta z} + I^-(0) e^{+j\beta z} \Rightarrow \underbrace{\frac{V^+(0)}{Z_c} e^{-j\beta z}}_{I^+(z) = \frac{V^+(z)}{Z_c}} - \underbrace{\frac{V^-(0)}{Z_c} e^{+j\beta z}}_{I^-(z) = -\frac{V^-(z)}{Z_c}} \end{cases}$$

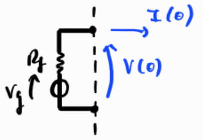
$$\Rightarrow \boxed{I(z) = \underbrace{\frac{V^+(0)}{Z_c}}_{I^+(0)} e^{-j\beta z} \left[1 - \Gamma(z)\right]}$$



$$V(z) = V^+(z)+V^-(z) = V^+(z)[1+\Gamma(z)] = V^+(0)e^{-j\beta z}\cdot[1+\Gamma(z)]$$

$$I(z) = I^+(z)+I^-(z) = I^+(z)[1-\Gamma(z)] = \frac{V^+(0)}{Z_c}e^{-j\beta z}\cdot[1-\Gamma(z)]$$

in $z=\emptyset$



$\Rightarrow V(0) = V_g - I(0)R_g$ (LKT)

$\Rightarrow V^+(0)[1+\Gamma(0)] = V_g - R_g\frac{V^+(0)}{Z_c}[1-\Gamma(0)]$ dove $\Gamma(0) = \Gamma(z=0) = \Gamma_L e^{-2j\beta l}$ $\left(\Gamma(z) = \Gamma_L \cdot e^{-2j\beta(l-z)}\right)$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

caso gen. adattato alla linea ($R_g = Z_c$)

- R_g, Z_c reali

$\Rightarrow V^+(0)[1+\Gamma(0)] = V_g - \cancel{R_g}\frac{V^+(0)}{\cancel{Z_c}}[1-\Gamma(0)] \Rightarrow V^+(0) = V_g/2$

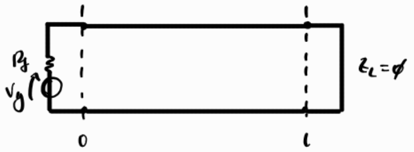
carico adattato alla linea ($Z_L = Z_c$)

$\Gamma_L = \frac{\cancel{Z_L - Z_c}}{Z_L+Z_c} = \emptyset \Rightarrow V^-(L) = \emptyset$ non c'è componente riflessa/regressiva

$V(z) = \frac{V_g}{2}e^{-j\beta z}$, $I(z) = \frac{V_g}{2Z_c}e^{-j\beta z}$

$|V(z)| = \frac{|V_g|}{2}$ cost.

caso $Z_L = \emptyset$ (cortocircuito)



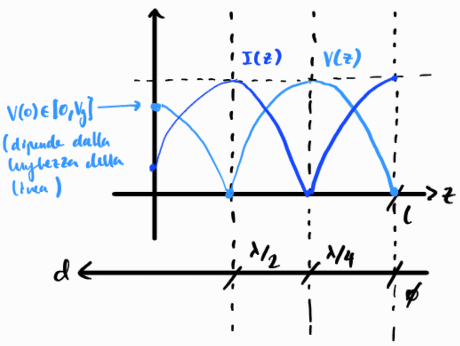
$\Rightarrow \Gamma_L = \frac{\cancel{Z_L}-Z_c}{\cancel{Z_L}+Z_c} \Rightarrow \Gamma_L = -1$ $\Rightarrow V(z) = \frac{V_g}{2}\cdot e^{-j\beta z}\cdot\left[1 - e^{-2j\beta(l-z)}\right]$

$$= \frac{V_g}{2}e^{\cancel{-j\beta z} - j\beta l + \cancel{j\beta z}}\cdot\left[e^{j\beta(l-z)} - e^{-j\beta(l-z)}\right]$$

$$= \frac{V_g}{2}\cdot e^{-j\beta l}\cdot 2j\sin[\beta(l-z)]$$

$\Rightarrow |V(d)| = |V_g|\cdot|\sin(\beta d)|$

$\Rightarrow V(z)$ è puramente stazionaria



max. per $\beta d = (2n+1)\pi/2$

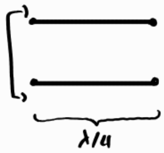
$\Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}d = (2n+1)\cancel{\pi}/2$

$\Rightarrow d = (2n+1)\lambda/4$ $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow I(z) = \frac{V_g}{2Z_c}e^{-j\beta z}\left[1+e^{-j2\beta(l-z)}\right]$

$\Rightarrow |I(z)| = \frac{|V_g|}{Z_c}\cdot|\cos(\beta d)|$

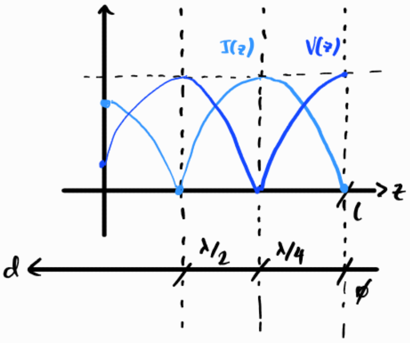
se mi pongo in $d=\lambda/4$:



cioè se realizzo una linea di trasm. lunga $d=\lambda/4$, con un $Z_L=\emptyset$ (cioè un corto) vedo una $Z_{eq.}=\emptyset$ cioè un cortocircuito perché avrò tensione max = V_g e corrente nulla

caso $Z_L \to \infty$ (aperto)

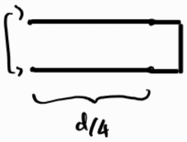
$$\Rightarrow \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = 1 \Rightarrow \boxed{\Gamma_L = 1}$$



$$V(z) = \frac{V_g}{2} e^{-j\beta z} \cdot \left[1 + e^{-j2\beta(l-z)}\right] \Rightarrow |V(d)| = |V_g| \cdot |\cos(\beta d)|$$

e analogamente : $\Rightarrow |I(d)| = \left|\frac{V_g}{2}\right| \cdot |\sin(\beta d)|$

in $\lambda/4$:



questa volta vedo un corto!
(corrente massima, tensione 0)

cioè il carico $Z_L = \infty$ (aperto) si comporta da cortocircuito

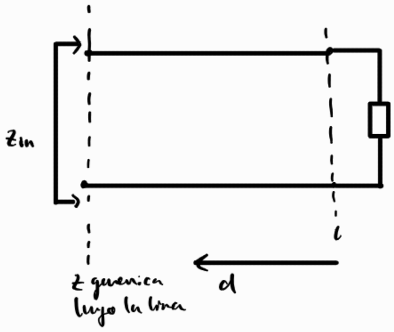
caso gen. non adattato alla linea $(Z_g \neq Z_c)$

$$(\text{LKT in } z = 0) \Rightarrow V^+(0) \cdot [1 + \Gamma(0)] = V_g - \frac{Z_g}{Z_c} \cdot [1 - \Gamma(0)] \cdot V^+(0)$$

$$\Rightarrow V^+(0) \left\{1 + \Gamma(0) + \frac{Z_g}{Z_c}[1 - \Gamma(0)]\right\} = V_g \Rightarrow V^+(0) = \frac{V_g}{\underbrace{1 + \Gamma_L e^{-2j\beta l} + \frac{Z_g}{Z_c} \cdot \left[1 - e^{-2j\beta l}\right]}_{\text{complesso!}}}$$

(se $Z_g = Z_c \Rightarrow V^+(0) = V_g/2$)

- cioè l'onda progressiva V^+ iniettata nella linea non è detto che sia in fase con V_g

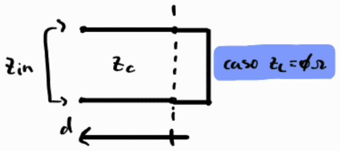


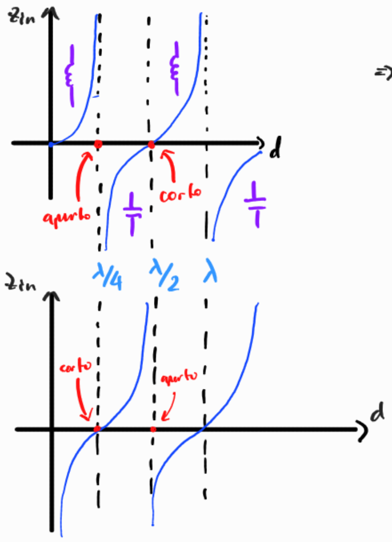
$$Z_{in}(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{\overset{Z_c}{V^+(0)} \cancel{e^{-j\beta z}} \cdot [1 + \Gamma(z)]}{I^+(0) \cancel{e^{-j\beta z}} \cdot [1 - \Gamma(z)]} = Z_c \cdot \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

$$\left(\Gamma(z) = \Gamma_L e^{-j2\beta(l-z)}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{in}(d) = Z_c \cdot \frac{1 + \Gamma(d)}{1 - \Gamma(d)}} = Z_c \cdot \frac{1 + \Gamma_L e^{-j2\beta(l-z)}}{1 - \Gamma_L e^{-j2\beta(l-z)}} \Rightarrow \boxed{Z_{in}(d) = Z_c \cdot \frac{Z_L + jZ_c \tan(\beta d)}{Z_c + jZ_L \tan(\beta d)}}$$

legge delle trasformaz. delle impedenze

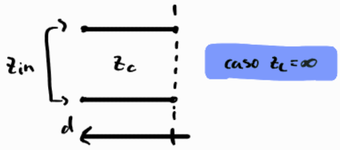




$\Rightarrow Z_{in}(d) = jZ_c \tan(\beta d)$

↳ sempre immaginaria (reattiva)

se $Im[Z] < 0 \Rightarrow$ impedenza capacitiva $(1/j\omega C)$
se $Im[Z] > 0 \Rightarrow$ impedenza induttiva $(j\omega L)$

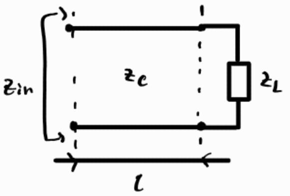


$$\Rightarrow Z_{in}(d) = Z_c \cdot \frac{1}{jZ_L \tan(\beta d)} = -jZ_c Z_L \cdot \underbrace{\frac{1}{\tan(\beta d)}}_{\text{cotan}(\beta d)}$$

rapporto onda stazionaria (ROS)
standing wave ratio (SWR)

$$\text{ROS}: \frac{|V_{max}(z)|}{|V_{min}(z)|} = \frac{\cancel{|V^+(0)|} \cdot |1 + |\Gamma_L||}{\cancel{|V^+(0)|} \cdot |1 - |\Gamma_L||} = \frac{|1 + |\Gamma_L||}{|1 - |\Gamma_L||}$$

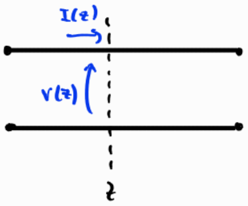
$$1 \leq \text{ROS} \leq \infty \qquad \begin{cases} \infty & \text{se } |\Gamma_L| = 1 \\ 1 & \text{se } |\Gamma_L| = 0 \end{cases}$$



casi notevoli:

- $* \; Z_c = Z_L \Rightarrow Z_{in}(z) = Z_L = Z_c$
- $* \; l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow Z_{in}(z=\frac{\lambda}{4}) = \frac{Z_c^2}{Z_L}$ (invertitore di impedenza / trasformatore)

flusso di potenza (media)



in z:

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{2} Re[V(z) \cdot I^*(z)] = \frac{1}{2} Re\left[V^+(0) \cdot e^{-j\beta z} \cdot [1+\Gamma(z)] \cdot \frac{V^{+*}(0)}{Z_c} \cdot [1-\Gamma^*(z)]\right]$$

$$\left(\Gamma(z) = \Gamma_L \cdot e^{-j2\beta(l-z)}\right)$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{2} Re\left[\frac{|V^+(0)|^2}{Z_c} \cdot \left(1 - \underbrace{\Gamma^*(z) + \Gamma(z)}_{2\,Im:} - |\Gamma(z)|^2\right)\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} a + jb - (a - jb) \\ = 2jb \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+(0)|^2}{Z_c} \cdot (1 - |\Gamma(z)|^2) \Rightarrow \boxed{P(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+(0)|^2}{Z_c} \cdot (1 - |\Gamma_L|)^2}$$

(non dipende da z)

$$P^+(z) = \frac{1}{2} Re[V^+(z) \cdot I^{+*}(z)] = \frac{1}{2} Re\left[V^+(0) e^{-j\beta z} \cdot \frac{V^{+*}(0)}{Z_c} \cdot e^{+j\beta z}\right] \Rightarrow \boxed{P^+(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+(0)|^2}{Z_c}}$$

$$P^-(z) = \frac{1}{2} Re[V^-(z) \cdot I^{-*}(z)] = \frac{1}{2} Re\left[V^-(0) e^{j\beta z} \cdot \frac{-V^{-*}(0)}{Z_c} \cdot e^{-j\beta z}\right] \Rightarrow \boxed{P^-(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{|V^-(0)|^2}{Z_c}}$$

$$\left[I^-(z) = -\frac{V^-(0)}{Z_c} \cdot e^{-j\beta z}\right]$$

- per $Z_c = 0 \vee Z_c = \infty \Rightarrow |\Gamma_L| = 1 \Rightarrow P(z) \equiv 0$ (come ci aspettiamo d'altronde, cortocircuito e aperto non assorbono potenza)
- anche nel caso di carichi reattivi $Z_L = jX \Rightarrow |\Gamma_L| = 1 \Rightarrow P(z) = 0$ (come è giusto che sia, sono elementi passivi – $\underline{P_{media}} \equiv 0$)

$$\left[\left|\frac{Z_c - jX}{Z_c + jX}\right| = \frac{Z_c^2 + X^2}{Z_c^2 + X^2} = 1\right]$$

carta di Smith

$$\Gamma = p + jq$$

$\bar{z}_L = \frac{Z_L}{Z_c}$ (impedenza di carico, normalizzata all'impedenza della linea)

$$\Rightarrow \underbrace{Z_{in}(z)} = Z_c \cdot \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \overset{(\text{per } Z_c = 1)}{=} \frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$

$$z = r + jX \Rightarrow r + jX = \frac{1 + p + jq}{1 - p - jq}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(p - \frac{r}{1+r}\right)^2 + q^2 = \frac{1}{(1+r)^2} & (\underline{Re}) \\ (p-1)^2 + \left(q - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2} & (\underline{Im}) \end{cases}$$

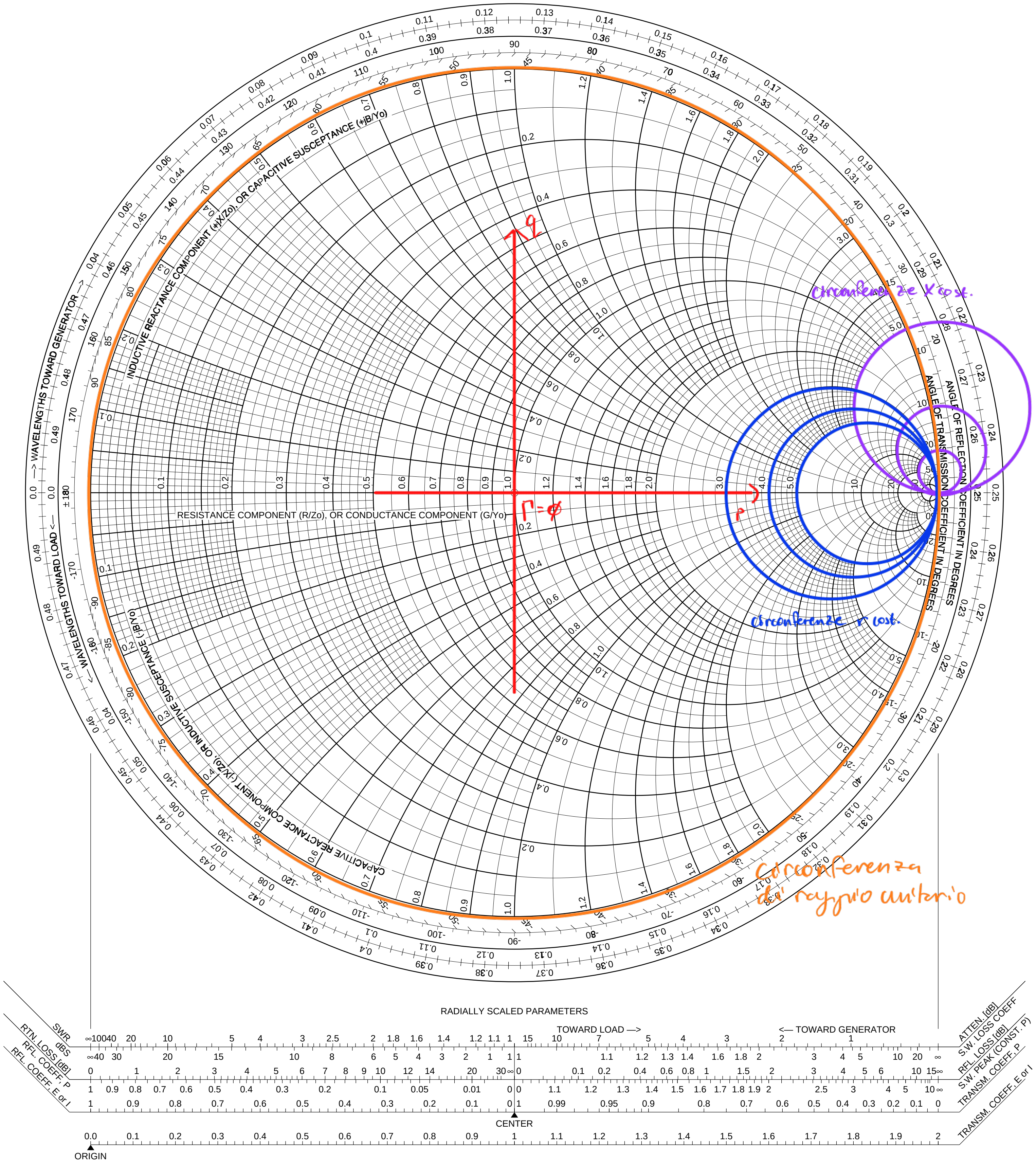
se $r \wedge X$ cost.

↳ le eq. descrivono delle circonferenze

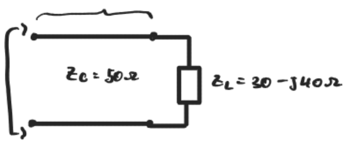
Smith Chart

by WA3VPZ

al di fuori della circonferenza di raggio unitario ho impedenze negative, non mi interessano



e.s.1

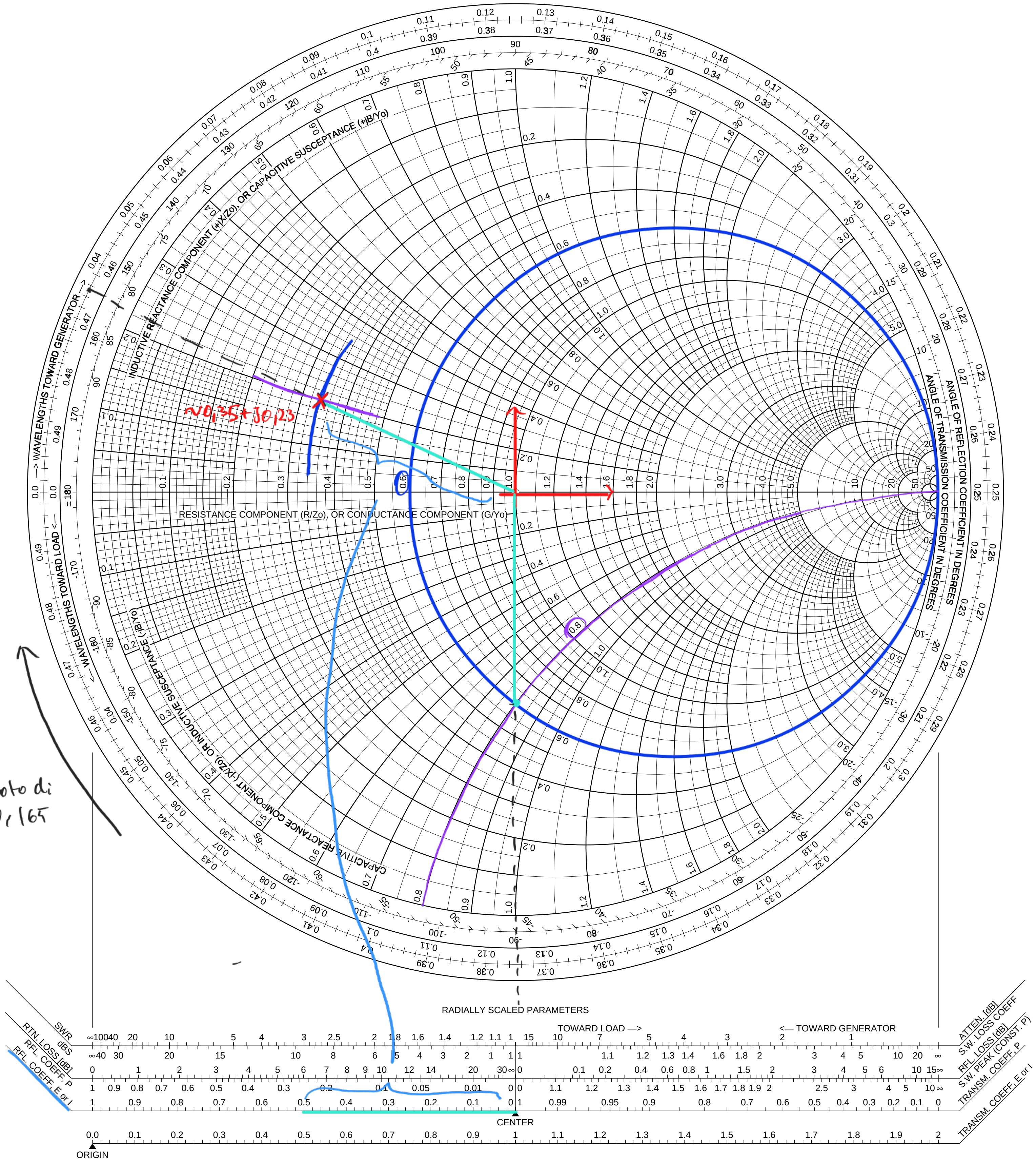


normalizzo: $\bar{z}_L = \frac{z_L}{z_c} = \frac{30-j40}{50} = 0{,}6 - j\cdot 0{,}8$ Ω

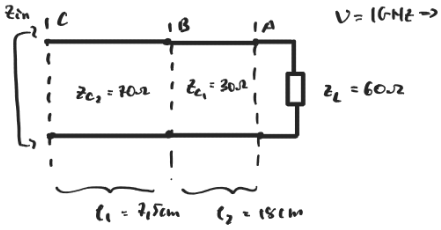
$\Gamma_L = \frac{z_c - z_L}{z_c + z_L}$

$\Gamma(d) = \Gamma_L \cdot e^{-j2\beta d}$ => $2\beta d = 2\pi$ (1 rotaz.) => $2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = 2\pi$ => $d = \frac{\lambda}{2}$

↳ per $d = \frac{\lambda}{2}$ faccio tutto il giro della carta di Smith



e.s. 2



$\nu = 1GHz \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 30cm$

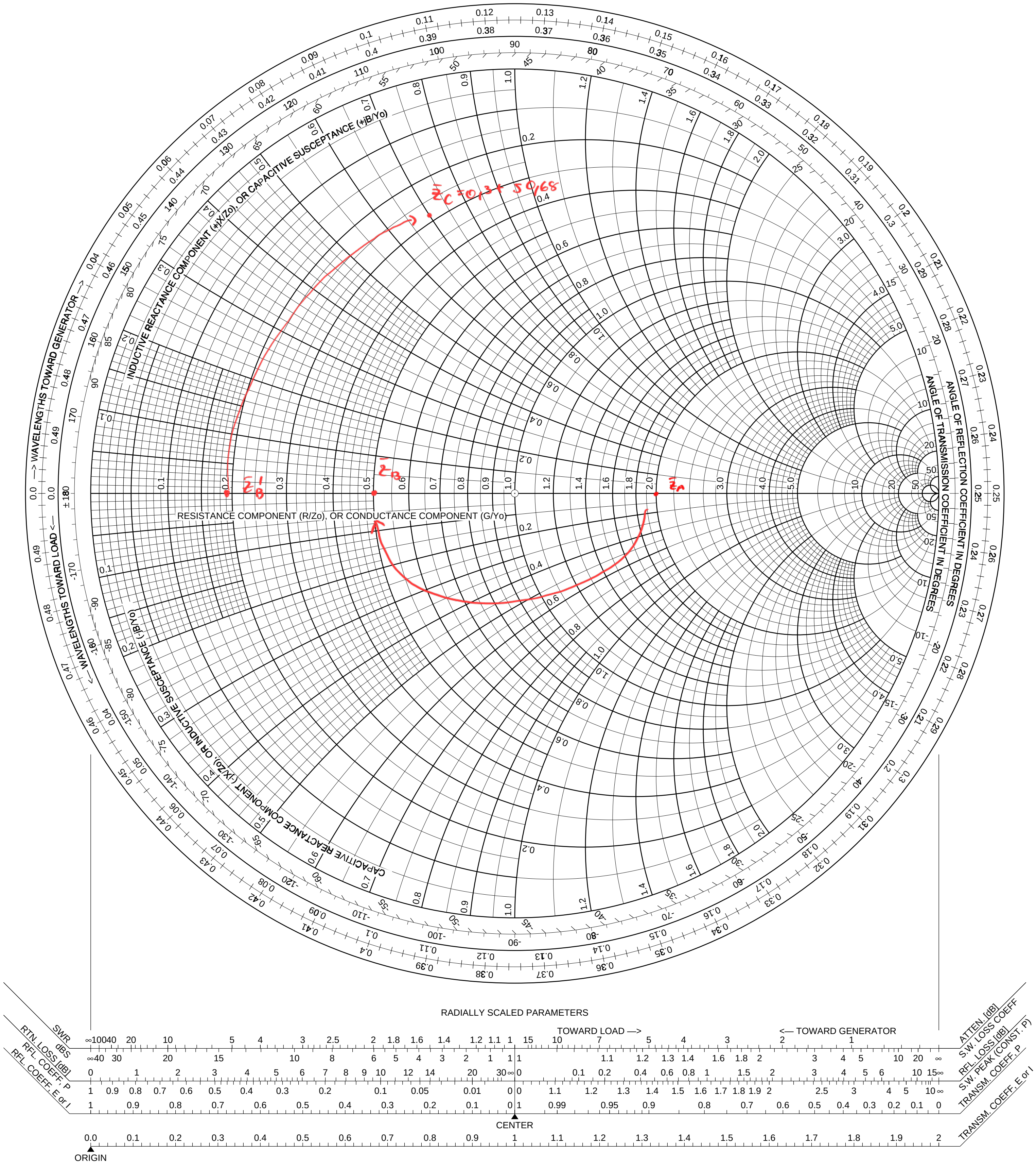
$\bar{z}_A = 2$

① $\frac{l_1}{\lambda} = 0,25 \Rightarrow$ faccio ½ giro

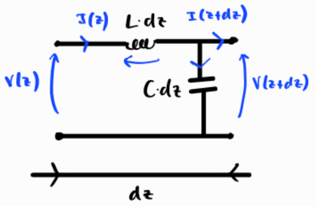
② $\bar{z}_B' = \bar{z}_B \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{denormalizzo}}}{z_{C_1}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normalizzo}}}{\frac{1}{z_{C_2}}} = 0,21$

③ $\frac{l_2}{\lambda} = 0,6 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 giro}}}{0,5} + 0,1$

④ $z_C = \bar{z}_C \cdot z_{C_2} = 22 + j47,5\ \Omega$



modello circuitale (senza perdite)



- l'induttanza tiene conto del campo magnetico generato dalle correnti, la capacità invece della tensione

$L = [H/m]$
$C = [F/m]$

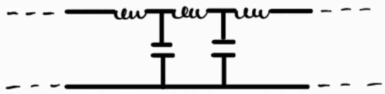
$$\Rightarrow \begin{cases} V(z+dz) = V(z) - \underbrace{J\omega L \cdot I(z)dz}_{V_L(z)} \\ I(z+dz) = I(z) - \underbrace{J\omega C V(z+dz) \cdot dz}_{I_C(z)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V(z+dz)-V(z)}{dz} = -J\omega L\, I(z)$$

$$\Rightarrow \frac{I(z+dz)-I(z)}{dz} = -J\omega C\, V(z+dz) \quad \xrightarrow{(dz \to 0)} \quad \begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -J\omega L \cdot I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -J\omega C\, V(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, V(z)} \\ \boxed{\frac{d^2I(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, I(z)} \end{cases}$$

ritroviamo l'eq. dei telegrafi
↳ è un modello valido

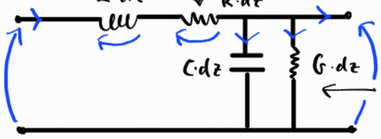
$(\gamma^2 = -\omega^2 LC \,,\ Z_C = \sqrt{L/C})$



- non è un passa basso perchè la freq. di taglio è >> freq. di lavoro

caso con perdite

perdite associate alle correnti (perdite nei conduttori)
⇒ vanno in serie



perdite associate alla tensione (perdite nel dielettrico)
⇒ vanno in parallelo

$$\begin{cases} V(z+dz) = I(z)(R+J\omega L)dz + V(z) \\ I(z+dz) = -V(z)(G+J\omega C)dz + I(z) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} V(z) = V^+(0)e^{-\gamma z} + V^-(0)e^{+\gamma z} \\ I(z) = I^+(0)e^{-\gamma z} + I^-(0)e^{+\gamma z} \end{cases}$$

con $\boxed{\gamma = \sqrt{(R+J\omega L)(G+J\omega C)}}$

$\boxed{Z_C = \frac{V^+(0)}{I^+(0)} = \sqrt{\frac{R+J\omega L}{G+J\omega C}}}$ ⇐ con perdite ho Z_C cmplx.

- faremo l'ipotesi che le perdite saranno "piccole" : $\begin{cases} \omega L >> R \\ \omega C >> G \end{cases}$

$Z_C \sim \sqrt{L/C}$ (reale)

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 LC + J\omega RC + J\omega LG + \cancel{RG}} \sim \sqrt{-\omega^2 LC + J\omega(RC+LG)} \Rightarrow \gamma = J\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{1 - \frac{J\omega(RC+LG)}{\omega LC}} \sim J\omega\sqrt{LC} \cdot \left(1 - J\frac{RC+LG}{2\omega LC}\right) = \boxed{\underbrace{J\omega\sqrt{LC}}_{\beta} + \underbrace{\frac{CR+LG}{2\sqrt{LC}}}_{\alpha}}$$

trascuro

$[rad/m]$ $[Np/m]$

$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ per x piccolo
(essendo R, G piccoli: numeratore << denominatore)

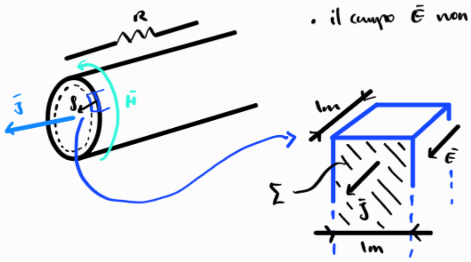
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \underbrace{\frac{R}{2Z_C}}_{\alpha_C} + \underbrace{\frac{G Z_C}{2}}_{\alpha_D}}$$

α_C : perdite associate ai conduttori
α_D : perdite associate ai dielettrici

calcolo di R

Hp. buon conduttore $(\sigma >> \omega\varepsilon) \Rightarrow a >> \delta$ ← spessore pelle

- il campo $\bar{E}$ non può penetrare in profondità ⇒ $\bar{J} = \sigma\bar{E}$ ⇒ $\bar{J}, \bar{E}$ rimarranno confinati nella corona circolare "esterna" di spessore δ (per la maggior parte)



$P_{dissipata} = \frac{1}{2} R |I|^2$

$\gamma_c = \alpha + j\beta = \frac{1}{\delta}(1+j)$ (In un buon conduttore $\alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$)

$$\Rightarrow P_{dissipata} = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\bar{E}|^2 dV \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma |\bar{E}(\rho)|^2 d\rho$$

$\bar{E}$ varia solo in ρ, è cost. nelle altre direzioni

$$|E(\rho)| = |E(\emptyset)| \cdot |e^{-\gamma_c \rho}| = |E(0)| \cdot |e^{-\alpha\rho} \cdot e^{-j\beta\rho}| = |E(0)| e^{-\alpha\rho} = \frac{|J(0)|}{\sigma} \cdot e^{-\rho/\delta}$$

$$\Rightarrow P_{dissipata} = \frac{1}{2} \frac{|J(0)|^2}{\sigma} \int_0^\infty e^{-2\alpha\rho} d\rho = \frac{|J(0)|^2}{4\sigma\alpha} = \frac{|J(0)|^2 \cdot \delta}{4\sigma}$$

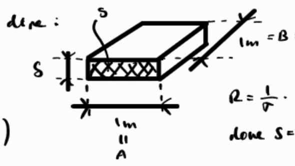
$$I = \iint_\Sigma \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \int_0^\infty J(\rho) d\rho = \int_0^\infty J(0) e^{-\gamma_c \rho} d\rho = J(0) \int_0^\infty e^{-\gamma_c \rho} d\rho = \frac{J(0)}{\gamma_c} = \frac{J(0) \cdot \delta}{(1+j)} \Rightarrow |I| = \frac{|J(0)|\delta}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{|J(0)|^2 \delta}{4\sigma}}_{P_{dissipat}} = \frac{1}{2} |I|^2 R = \frac{1}{2} \frac{|J(0)|^2}{2} \cdot \delta^2 \cdot \underset{\uparrow}{R} \Rightarrow \boxed{R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \ [\Omega]} = [\Omega/\square]$$

la chiamo resistenza superficiale: R_s

un blocco di 1m x 1m x "infinito"

è come dire:



$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{S}$

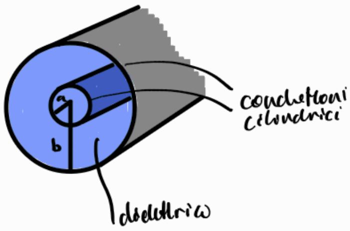
dove $S = \delta \cdot \underset{1m}{A} = \delta$ e $\ell = B = 1m$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\sigma\delta}$

$\Rightarrow R = R_s \cdot \frac{1m}{2\pi a}$ $\left(R = \rho \cdot \frac{\ell}{S} \text{ con } \ell = 1m, S = \delta \cdot 2\pi a, \rho = \frac{1}{\sigma}\right)$

- In RF uso solo una piccola δ quindi tendenzialmente avrò R grande

conduttore coassiale con perdite



$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$

$z_c = \sqrt{L/C}$

$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log(b/a)$ [H/m]

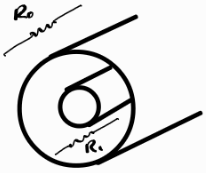
$C = \frac{2\pi\varepsilon'}{\log(b/a)}$

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{\pi\nu\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad [\Omega/\square]$$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}$

$|V_{max}| = |E_{max}| \cdot \log\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \underset{\uparrow}{r}$

raggio



$$\left.\begin{array}{l} R_0 = R_s \cdot \frac{1}{2\pi b} \\ R_1 = R_s \cdot \frac{1}{2\pi a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R^{TOT} = R_0 + R_1 = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

li sommo perché passa la stessa corrente nei due conduttori => sono in serie

$\boxed{\frac{G}{C} = \frac{\sigma_D}{\varepsilon}}$ con $\sigma_D = \omega\varepsilon''$ (<u>conducibilità equivalente</u>)

ε della capacità (ε' in questo caso)

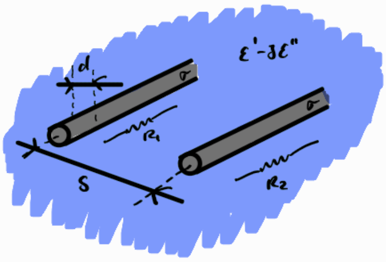
$\Rightarrow G = \frac{2\pi}{\lg(b/a)} \cdot \omega\varepsilon''$

$\Rightarrow z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\eta}{2\pi} \lg(b/a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha_c = \frac{R}{2z_c}} \\ \boxed{\alpha_D = \frac{G \cdot z_c}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} \end{cases}$$

<u>per tutte le strutture TEM</u>

Linea bifilare



$$C = \frac{\pi \varepsilon'}{\operatorname{arccosh}(s/d)}$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \operatorname{arccosh}(s/d)$$

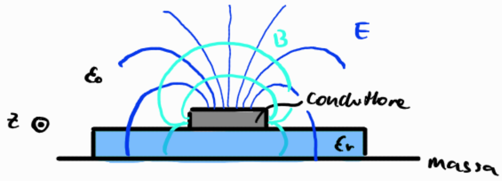
$$Z_c = \frac{\eta}{\pi} \operatorname{arccosh}(s/d)$$

$$R = \underbrace{\frac{2R_s}{\pi d}}_{R_1 + R_2} \cdot \underbrace{\left(\frac{s/d}{\sqrt{(s/d)^2 - 1}} \right)}$$

fattore correttivo che tiene conto dell'induzione tra i due conduttori. Notiamo che $\longrightarrow 1$ per $\frac{s}{d} \longrightarrow \infty$ cioè per conduttori sottili e distanti

linee quasi-TEM

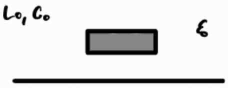
e.s. microstriscia (l'onda si propaga verso z)



- passando da un mezzo all'altro ($\varepsilon_0 \to \varepsilon_r$) cambia la velocità dell'onda e quindi non può essere TEM
- ho un po' di onda in ε_0 e un po' in ε_r

- per soddisfare le condizioni al contorno tra aria e dielettrico deve ∃ una piccola componente trasversa lungo z ⇒ non è un'onda puramente TEM. In prima battuta però la considero TEM perchè c'è una piccola componente

$L = L_0$ (non dipende dal dielettrico) ⇒



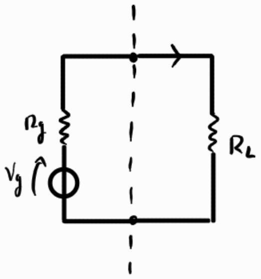
$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \overset{\text{per strutture TEM}}{=} \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

$$\Rightarrow L_0 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{C_0}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C}} \\ v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}} \end{cases}$$

$L_0 C = \mu_0 \varepsilon_{eff}$ $\quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{eff} \leq \varepsilon_r$ dipende da come è fatta la struttura

adattamento di impedenza



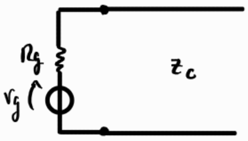
$$\begin{cases} P_L = \frac{1}{2}|I|^2 R_L \\ I = \frac{V_g}{R_g + R_L} \end{cases} \Rightarrow P_L = \frac{1}{2}|V_g|^2 \cdot \frac{R_L}{(R_g+R_L)^2}$$

se $R_L \to 0$, $P_L \to 0$

se $R_L \to \infty$, $P_L \to 0$

- per trovare il massimo: $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{1}{(R_g+R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R_g+R_L)^3} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_g}$ per avere max. trasferimento al carico

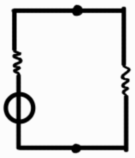
$\hookrightarrow (R_L = R_g) \Rightarrow \boxed{P_L|_{max} = \frac{1}{8}\frac{|V_g|^2}{R_g} = P_d}$ potenza disponibile (la max potenza che un generatore può trasferire al carico)



per $\boxed{z_c = R_g} \Rightarrow v^+(0) = \frac{V_g}{2}$

$\Rightarrow P^+(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V^+(0)|^2}{z_c} = \frac{|V_g|^2}{8R_g}$ cioè la max. erogazione di potenza si ha con l'adattamento alla linea

$P_L = P^+(0)(1 - |\Gamma_L|^2)$ se il carico non è adattato rimette una parte della potenza nella linea



$$P_L = P^+(0)(1-|\Gamma_L|^2) = \frac{|V_g|^2}{8R_g}\left[1 - \frac{(R_L-R_g)^2}{(R_L+R_g)^2}\right] \qquad \left(\Gamma_L = \frac{R_L - R_g}{R_L + R_g}\right)$$

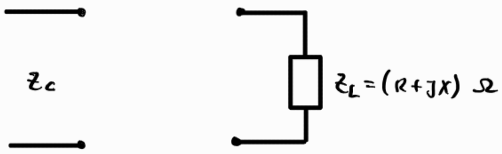
$$\Rightarrow P_L = \frac{|V_g|^2}{8R_g} \cdot \frac{\cancel{R_L^2} + \cancel{R_g^2} + 2R_L R_g - \cancel{R_L^2} - \cancel{R_g^2} + 2R_L R_g}{(R_L+R_g)^2} = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{R_L}{(R_L+R_g)^2}$$

↑ consideriamo la linea infinitamente corta ⇒ parametri concentrati

⇒ (se così non fosse non vedrei $z_{in} = R_L$)

$\hookrightarrow$ la teoria delle linee include le equaz. di $\underbrace{\text{elettrotecnica}}_{\text{è un modello a parametri concentrati}}$

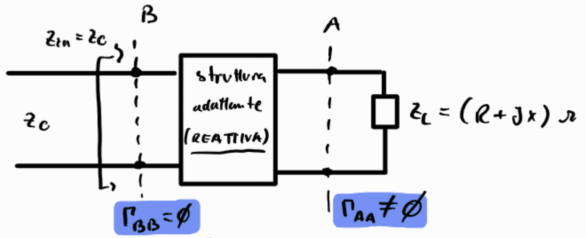
struttura di adattamento



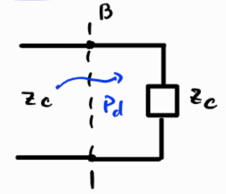
$$Z_C \neq Z_L \Rightarrow \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \neq 0$$

↳ per via del disadattamento delle impedenza una parte della potenza viene riflessa

per Z_c, Z_L fissi => introduco una linea di adattamento



=>

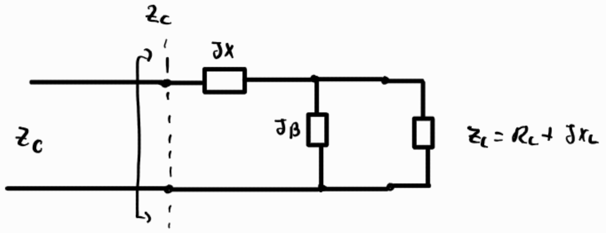


(Z_L + struttura) assorbono la max potenza => come se la ripartiscono?

↳ struttura è reattiva => non assorbe potenza reale

nonostante $\Gamma_{AA} \neq 0$, per effetto di riverberazioni multiple tutta la potenza reale finisce a Z_L

reti ad "L"



$$Z_c = JX + \cfrac{1}{JB + \cfrac{1}{R_L + JX_L}}$$

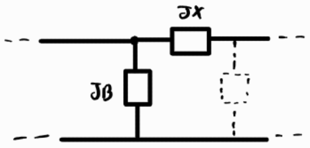
$$\begin{cases} R_L - Z_C = B(XR_L - X_L Z_C) & [Re] \\ X(1 - BX_L) = BZ_C R_L - X_L & [Im] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{X_L \pm \sqrt{\dfrac{R_L}{Z_C}} \cdot \sqrt{R_L^2 + X_L^2 - Z_C R_C}}{R_L^2 + X_L^2} \\ X = \dfrac{1}{B} + \dfrac{X_L Z_C}{R_L} - \dfrac{Z_C}{B R_L} \end{cases}$$

a meno che ci sono specifiche particolari vanno bene sia la sol. + che quella −

- il problema è che : $\underbrace{R_L^2 + X_L^2 - Z_e R_c \geq 0}_{\text{verificato per } G_L < G_c = \frac{1}{Z_e}}$ => se così non fosse B sarebbe immaginaria e JB avrebbe parte reale (struttura non più solo reattiva)

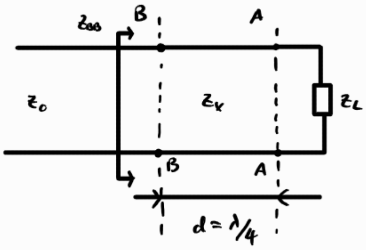
se non è verificato cambio struttura :



$$\Rightarrow \begin{cases} X = \pm\sqrt{R_L(Z_c - R_L)} - X_L \\ B = \pm \dfrac{\sqrt{(Z_c - R_L)/R_L}}{Z_c} \end{cases}$$

- trasformatore λ/4
- trasformatore λ/4 con neutralizzaz.
- stub semplice
- doppio stub

trasformatore λ/4



$$z_{BB} = z_x \frac{z_L + jz_x \tan(\beta d)}{z_x + jz_L \tan(\beta d)}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \beta \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{4}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\beta \cdot \frac{\lambda}{4}\right) \longrightarrow \infty$$

per $d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \underbrace{z_{BB}}_{} = \frac{z_x^2}{z_L} = \underbrace{z_c}_{} \Rightarrow \boxed{z_x = \sqrt{z_c z_L}}$

adattamento

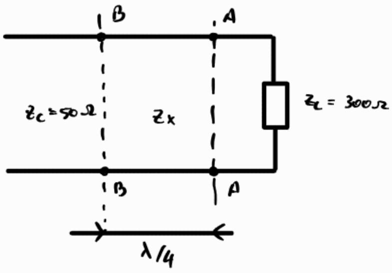
z_x, z_c reali perchè sono impedenza di linea

$\Rightarrow z_L$ deve essere per forza reale cioè questa struttura può adattare solo carichi reali

↑

è molto limitante

- un altro svantaggio è che funziona a una sola freq.
- altro svantaggio è che devo realizzare una linea di un preciso valore che non è sempre commercialmente trovabile

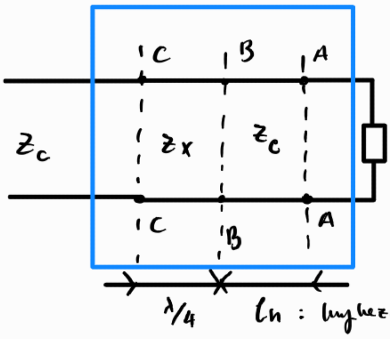


$z_x = \sqrt{300 \cdot 50} = 122,5\Omega$

come prima, $\Gamma_{BB} = \emptyset$ ma $\Gamma_{AA} \neq \emptyset$

↳ me lo spiego sempre con le riverberazioni

trasformatore λ/4 con neutralizzazione



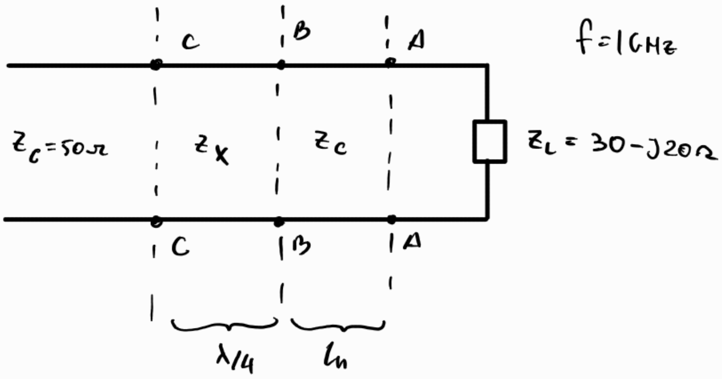
l_n : lunghezza neutralizzatore

↑

parte di neutralizzazione

il neutralizzatore fa sì che in B vedo solo impedenza reale

e.s.



$f = 1GHz$

$\bar{z}_L = \frac{z_L}{z_c} = \frac{30-j20}{50} = 0,6 - j0,4 = \bar{z}_{AA}$

$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0,3m$

$\Gamma_{cc} = \emptyset$

$\Rightarrow$ ruoto di $0,082\lambda$

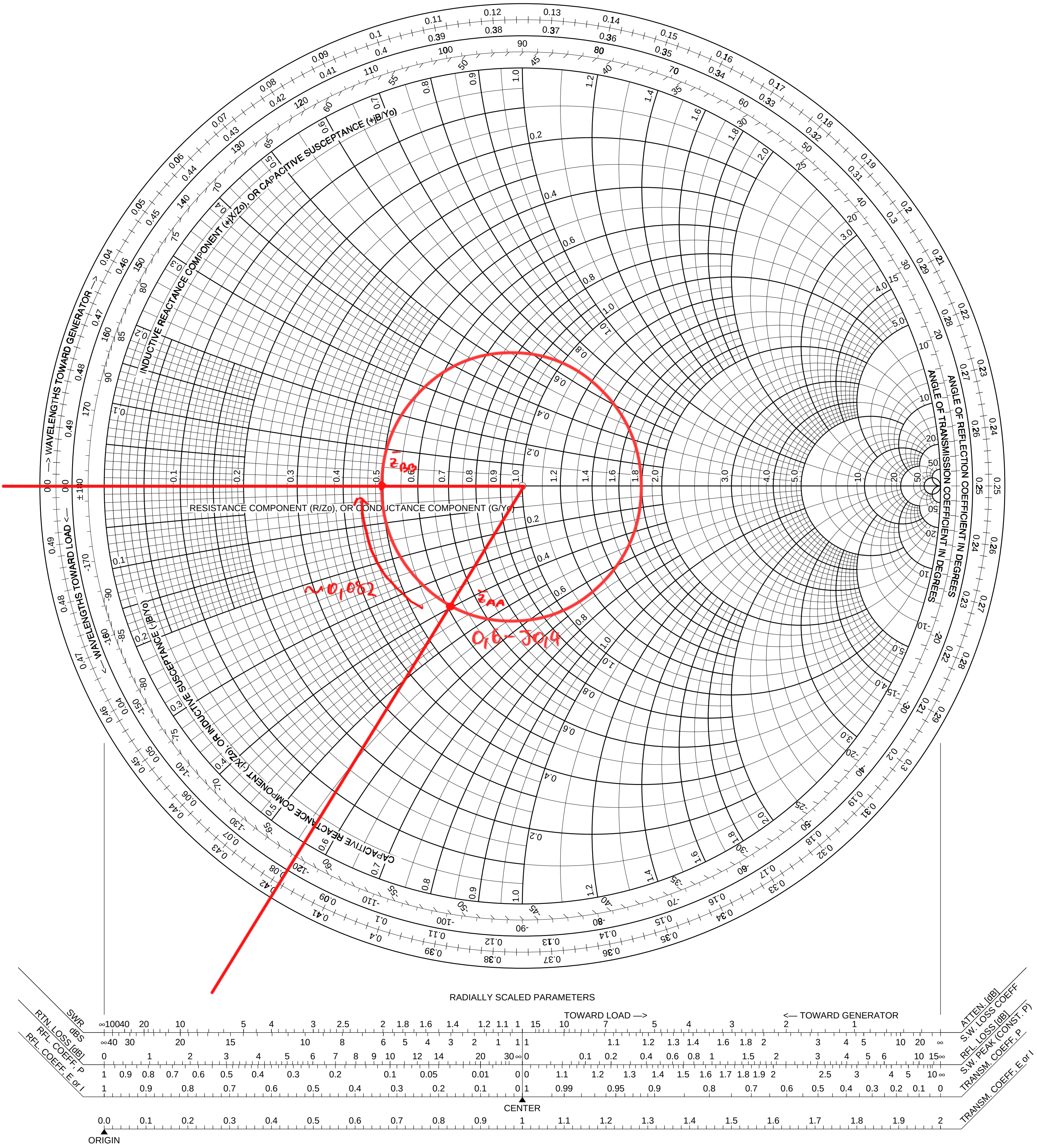
$\Rightarrow \underline{l_n = 0,082\lambda = 2,46cm}$

$\Rightarrow z_{BB} = \bar{z}_{BB} \cdot z_c = \underline{24,5\Omega}$

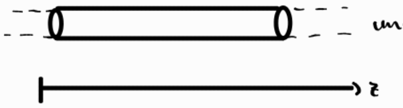
$\Rightarrow z_X = \sqrt{z_{BB} \cdot z_c} = \underline{35\Omega}$

Smith Chart

by WA3VPZ



linee non TEM



uniformi lungo z

$$\begin{cases} \bar{E}(x,y,z) = \underline{\bar{E}(x,y)} \cdot e^{-\gamma z} \\ \bar{H}(x,y,z) = \underline{\bar{H}(x,y)} \cdot e^{-\gamma z} \end{cases}$$

γ complessa : $\gamma = \alpha + j\beta$?

((con le onde TEM $\bar{E}$ era cost. sul piano xy, non aveva questa dipendenza (x,y))

$$\bar{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\hat{u}_x + E_y(x,y,z)\hat{u}_y + \underbrace{E_z(x,y,z)\hat{u}_z}_{\text{era trascurabile nelle TEM}}$$

(molto più generico del caso di linee TEM)

(analogamente per $\bar{H}$)

confronta con le TEM

continua a valere: $\begin{cases} \boxed{\nabla^2 \bar{E} = -k^2 \bar{E}} \\ \boxed{\nabla^2 \bar{H} = -k^2 \bar{H}} \end{cases}$ con $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ (eq. Helmholtz)

$$\nabla^2 = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{\nabla_t^2 \text{: trasverso}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ma $\dfrac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} = \gamma^2 \bar{E}(x,y,z)$

$$\nabla^2 \bar{E} = -k^2 \bar{E} \Rightarrow \nabla_t^2 \bar{E} = -(\gamma^2 + k^2)\bar{E}$$

analogamente : $\nabla_t^2 \bar{H} = -(\gamma^2 + k^2)\bar{H}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boxed{\nabla_t^2 \bar{E} = -(\gamma^2+k^2)\bar{E}} \\ \boxed{\nabla_t^2 \bar{H} = -(\gamma^2+k^2)\bar{H}} \end{cases}$

2 · 3 eq. scalari

(in assenza di sorgenti)

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \\ -\gamma E_x - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon \bar{E} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \\ -\gamma H_x - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \end{cases}$$

usiamo E_z e H_z come var. indipendenti (esprimo tutto in funz. di E_z e H_z)

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{E_x} = -\dfrac{1}{\gamma^2+k^2}\left(\gamma \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ \boxed{E_y} = \dfrac{1}{\gamma^2+k^2}\left(-\gamma \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{H_x} = \dfrac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \dfrac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ \boxed{H_y} = -\dfrac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial E_x} + \gamma \dfrac{\partial H_z}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\underline{\gamma^2 + k^2 = k_c^2}$$

E_z e H_z le ricaviamo dalle eq. di Helmholtz

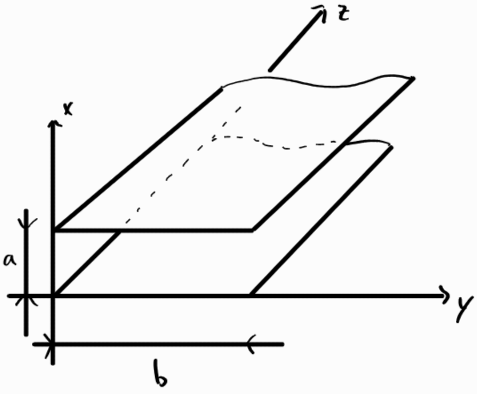
$$\hookrightarrow \begin{cases} \nabla_t^2 E_z = -k_c^2 E_z \\ \nabla_t^2 H_z = -k_c^2 H_z \end{cases}$$

$E_z = \emptyset$; $H_z = \emptyset$ $\Rightarrow$ TEM per def. non avrebbe componenti lungo la direz. di propagaz.

$E_z = 0 \,;\, H_z \neq 0 \Rightarrow$ **TE** (trasvero elettrico)

$E_z \neq 0 \,;\, H_z = 0 \Rightarrow$ **TM** (trasverso magnetico)

$E_z \neq 0 \,;\, H_z = 0 \Rightarrow$ **ibridi**



trascuro gli effetti di bordo cioè considero la struttura che si estende all'∞

caso TEM

$E_z = H_z = 0 \Rightarrow \bar{E}$ e $\bar{H}$ nulli a meno che: $\gamma^2 + k^2 = 0$ (ottengo $\frac{0}{0}$ forma indet.)

$\Rightarrow \gamma^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 = -k^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \Rightarrow \gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm j\beta$ (uguale al caso già trovato per le linee TEM)

$\nabla_t^2 \bar{H} = -(\gamma^2 + k^2)\bar{H}$

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \bar{E} = 0 \\ \nabla_t^2 \bar{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{E} \text{ "statico"}$$

supponendo
$$\begin{cases} E_x = E_0 \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_y = \dfrac{\gamma}{j\omega\mu} E_x \\ H_x = 0 \end{cases}$$

Caso TM

$H_z = 0 \quad ; \quad E_z \neq 0$

$\Rightarrow \nabla_t^2 E_z = -k_c^2 E_z$ con $E_z(x,y,z) = E_z(x,z)$ (perchè trascuro gli effetti di bordo)

↳ praticamente considero il conduttore esteso all'∞ anche lungo y

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -k_c^2 E_z$$

$E_z(x) = A\sin(k_c x) + B\cos(k_c x)$ con A, B, k_c da det.

E_z in corrispondenza dei conduttori $E_z = 0$ perchè $E = \underset{0}{\cancel{E_{\parallel}}} + E_{\perp}$ ma $E_z = E_{\parallel}$ (condiz. al contorno)

$\Rightarrow E_z(0) = E_z(a) = 0$

$E_z(0) = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$

$E_z(a) = \emptyset \Rightarrow k_c \cdot a = m\pi$ (scarto $A = \emptyset$ senno $\Rightarrow E_z = \emptyset$ e ricado nel modo TEM, ma sto cercando gli altri)

$\uparrow$ ho ∞ modi!

$m = 1, \dots, \infty$ ($\neq 0$ senno $\underbrace{k_c = \emptyset}_{\text{caso TEM}}$) $\Rightarrow TM_m$

$\hookrightarrow k_c = \frac{m\pi}{a}$

$$\Rightarrow \boxed{E_z(x) = A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot e^{-\gamma z}}$$

(fino ad adesso avevamo sottointeso il termine $e^{-\gamma z}$)

adesso ricavo le altre componenti di $\vec{E}$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\gamma a}{m\pi} A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot e^{-\gamma z} \\ E_y = \emptyset \end{cases} ; \quad \begin{cases} H_x = \emptyset \\ H_y = -A \frac{j\omega\varepsilon a}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot e^{-\gamma z} \end{cases}$$

($H_z = 0$ in quanto TE)

studiamo γ:

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2 \mu\varepsilon}$$

$\Rightarrow \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon < \emptyset$ per avere $\gamma = j\beta$ (se fosse γ reale cioè $\gamma = \alpha$ avrei attenuaz., con γ imm. ho propagaz.)

$\hookrightarrow$ $\boxed{\omega > \omega_c}$ con $\boxed{\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{m\pi}{a}}$ pulsaz. di taglio, pulsaz. oltre la quale possono esistere modi ulteriori

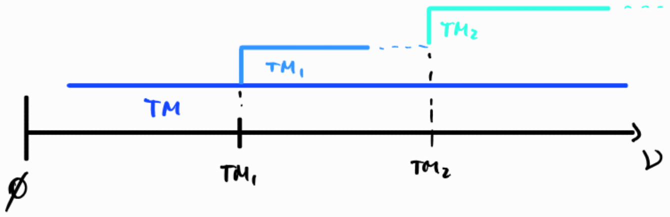
$\omega_c = 2\pi\nu_c = 2\pi \frac{c}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_c = 2\pi \frac{v}{\omega_c} \Rightarrow \boxed{\lambda_c = \frac{2a}{m}}$ $\left(\nu_c = \frac{vm}{2a}\right)$

$\uparrow v = \nu_c \cdot \lambda_c$ $\qquad$ $\uparrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

se voglio una struttura TEM

$\hookrightarrow \lambda < \lambda_c = \frac{2a}{m}$ (lunghezza d'onda comparabile con dimensione dell'onda)

senno nascono modi non TEM



TM_1: velocità di propagaz.?

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ma $\lambda = \frac{v_f}{\nu} \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{v_f}$

$$\gamma = \underbrace{j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}_{\beta} \quad (\omega > \omega_c)$$

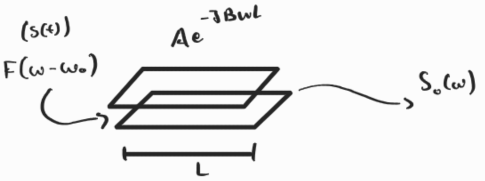
$$v_f = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}}$$

velocità di fase (è una velocità "apparente")

$v_{TEM} \neq v_{TM_m}$

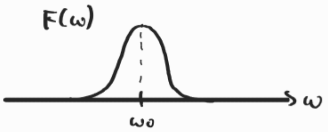
$\hookrightarrow$ dispersione intermodale nel vuoto $v = c \Rightarrow v_f > c$!!

va bene comunque perchè non è la velocità dell'<u>energia</u> che invece non può superare quella della luce

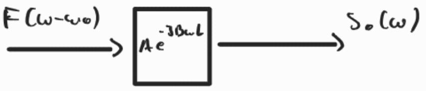


$$s(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_0 t) = \mathrm{Re}\left[f(t) e^{J\omega_0 t} \right]$$

$$f(t) \longrightarrow F(\omega)$$
$$s(t) \longrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (\text{considero solo } \omega > 0)$$



$$\Rightarrow S_0(\omega) = F(\omega-\omega_0) \cdot A e^{-J B \omega L}$$



nell'intorno di $\omega_0 \Rightarrow \beta(\omega) \sim \underbrace{\beta(\omega_0)}_{\beta_0} + \left.\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega-\omega_0) + \dots = \beta_0 + \beta_0' \cdot \Delta\omega$

$$\Rightarrow S_0(\omega) = A F(\omega-\omega_0) e^{-J\beta_0 L} \cdot e^{-J\beta_0' L \Delta\omega} \xrightarrow[\text{antitrasformo}]{} s_0(t) = A \underbrace{f(t - \beta_0' L)}_{\substack{t - \beta_0' L = 0 \\ \Rightarrow t = \beta_0' L \\ \Rightarrow t = \frac{1}{v_g} L}} \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t + \beta_0 L)}_{v_f = \frac{\omega_0}{\beta_0}}$$

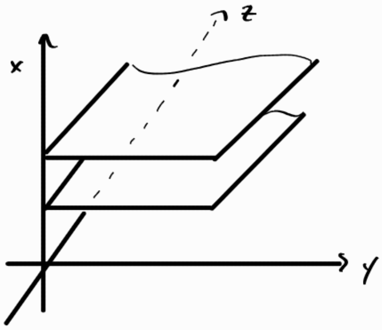
$\hookrightarrow v_g = \frac{1}{\beta_0'}$

$$\frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \boxed{v_g = v\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} < v \quad (\omega > \omega_0)$$

$$\boxed{v_f = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{\beta(\omega)}}$$

Sia v_g che v_f dipendono da ω

nel modo TEM il problema non si pone : $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v$; $v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v$



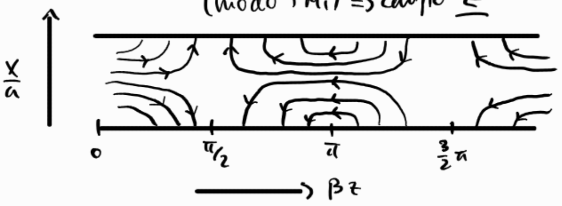
$$Z_{TM} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{E_x}{E_y} \Rightarrow Z_{TM} = \eta\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$F : \sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$

$$\begin{cases} \omega > \omega_c & Z_{TM} \text{ reale} \\ \omega < \omega_c & Z_{TM} \text{ immaginaria} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il modo non si può propagare

(modo TM_1) $\Rightarrow$ campo $\underline{E}$



$\Rightarrow$ le cariche indotte sui conduttori sup. e inf. sono dello stesso segno

↳ non posso def. una corrente e tensione

caso TE

TE : $E_z = 0$; $H_z \neq 0$

$$\Rightarrow \nabla_t^2 H_z = -k_c^2 H_z$$

$$H_z(x,z) = \left[A\sin(k_c x) + B\cos(k_c x)\right] e^{-\gamma z}$$

$$E_y \propto \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\underbrace{E_y(0,y) = 0}_{} \Rightarrow A = 0$$

condiz. al contorno:
campo // al condutt $= 0$

$$\Rightarrow H_z = B\cos(k_c x) e^{-\gamma z}$$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c} B\sin(k_c x) e^{-\gamma z} \\ H_z = \frac{j\beta}{k_c} B\sin(k_c x) e^{-\gamma z} \\ H_y = 0 \end{cases}$$

$E_y(a,y) = 0 \Rightarrow k_c = \frac{m\pi}{a}$ $\quad (TE_m)$

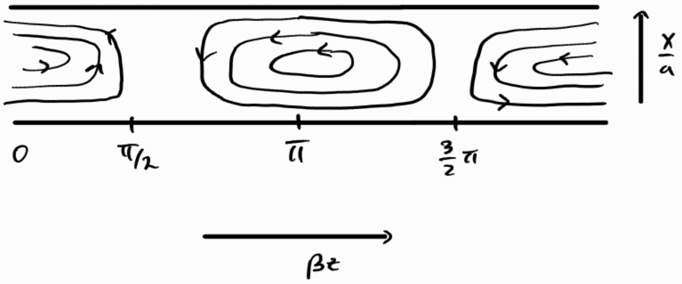
$$\gamma = j\beta = jk\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$Z_{TE} = \frac{E_t}{H_t} = \underset{\uparrow}{-}\frac{E_y}{H_x} \Rightarrow Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

per far rispettare la regola della mano destra

non c'è carica indotta! $\Rightarrow$ questo perché $E_x = E_\perp = E_{//} = 0$

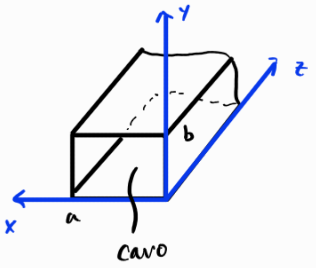
($\text{modo } TE_1$) $\Rightarrow$ campo $\underline{H}$



le correnti sono lungo y !
(regola della mano destra)

$\hookrightarrow$ ciò che viaggia lungo la linea (cioè i campi compresi tra le guide) sono ciò che trasportano potenza: NON tensioni e correnti (ed è vero anche per linee TEM)

guida d'onda rettangolare



$\nexists$ sol. "statica" $\Rightarrow$ $\nexists$ TEM
(servono almeno 2 conduttori)

TEM richiede un campo "elettrostatico" sul piano trasverso
(campo irrotaz. sul piano trasverso) $\Rightarrow$ posso def. un pot.

$\hookrightarrow$ ma ho una sup. equipot. $\Rightarrow$ $E = -\nabla V$ ma $V = \text{cost.}$

$\hookrightarrow$ $E \equiv 0$ unica sol. elettrostatica (è una gabbia di Faraday)

caso TM

$E_z \neq 0$; $H_z = 0$

$$\nabla_t^2 E_z = -k_c^2 E_z \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -k_c^2 E_z$$

separaz. delle variabili $\Rightarrow$ $E_z(x,y) = F(x) \cdot G(x)$

$$\Rightarrow \quad F''(x)\,G(y) + F(x) \cdot G''(y) = -k_c^2 F(x) \cdot G(y)$$

$$\Big\downarrow \cdot \frac{1}{F(x) \cdot G(y)}$$

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{G''(y)}{G(y)}}_{g(y)} = -k_c^2 \Leftrightarrow f(x), g(y) = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = -k_x^2 \; ; \; \frac{G''(y)}{G(y)} = -k_y^2 \quad \text{con} \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x) = A' \sin(k_x x) + B' \cos(k_x x) \\ G(y) = C' \sin(k_y y) + D' \cos(k_y y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $E_z(x,y) = F(x) \cdot G(y)$ con A', B', C', D' da det. con le condiz. dalle condiz. al contorno

$$\left.\begin{array}{l} E_z(0,y) = 0 \Rightarrow B' = 0 \\ E_z(x,0) = 0 \Rightarrow D' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{E_z(x,y) = \underset{\uparrow \atop A'\cdot C'}{A} \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot e^{-\gamma z}}$$

$E_z(a,y) = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \Rightarrow k_x = m\frac{\pi}{a}$ $\quad m = 1, 2, \dots$

$E_z(x,b) = 0 \Rightarrow k_y = n\frac{\pi}{b}$ $\quad n = 1, 2, \dots$

m e $n \neq 0$ (sennò $E_z \equiv 0$)

↳ modo TM_{mn} ($\Rightarrow TM_{11}$ è il modo a freq. più bassa)

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}_{<0 \text{ per potersi propagare}}} \Rightarrow \omega > \omega_c \quad \text{con} \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}$$

$$\boxed{\begin{cases} E_x = -\dfrac{j\beta k_x}{k_c^2} A\cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y)\, e^{-j\beta z} \\ E_y = -\dfrac{j\beta k_y}{k_c^2} A \sin(k_y y) \cdot \cos(k_y y)\, e^{-j\beta z} \\ H_x = \dfrac{j\omega\varepsilon k_y}{k_c^2} \cdot A\sin(k_x x) \cdot \cos(k_y y)\, e^{-j\beta z} \\ H_y = -\dfrac{j\omega\varepsilon k_x}{k_c^2} A\cos(k_x x) \cdot \sin(k_y y) e^{-j\beta z} \end{cases}}$$

(anche E_y essendo $E_{//}$ deve annullarsi in $x = 0$; $x = a$)

(anche E_x essendo $E_{//}$ deve annullarsi in $y = 0$; $y = b$)

↳ ponendo k_y e k_x = $m\frac{\pi}{a}$ e $n\frac{\pi}{b}$ rispettivamente è tutto verificato

($H_z = 0$ in quanto TM)

caso TE

$E_z = 0$; $H_z \neq 0$

$$\nabla_t^2 H_z = -k_c^2 H_z$$

$\Rightarrow H_z(x,y) = F(x) \cdot G(y)$; $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$

$$\Rightarrow H_z(x,y) = \left[A'' \sin(k_x x) + B'' \cos(k_x x)\right] \cdot \left[C'' \sin(k_y y) + D'' \cos(k_y y)\right]$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} \cdot \left[A''\sin(k_x x) + B''\cos(k_x x)\right] \cdot \left[C''\cos(k_y y) - D''\sin(k_y y)\right]$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\mu k_x}{k_c^2} \cdot \left[A''\cos(k_x x) - B''\sin(k_x x)\right] \cdot \left[C''\sin(k_y y) + D''\sin(k_y y)\right]$$

condiz. al contorno $\Rightarrow E_x(x,0) = 0 \Rightarrow C'' = 0$

$\Rightarrow E_y(0,y) = 0 \Rightarrow A'' = 0$

↳ $\boxed{H_z(x,y) = B\cos(k_x x)\cos(k_y y) \cdot e^{-j\beta z}}$

$E_x(x,b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{m\pi}{b}$

$E_y(a,y) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}$

$\Rightarrow$ modo TE_{mn}

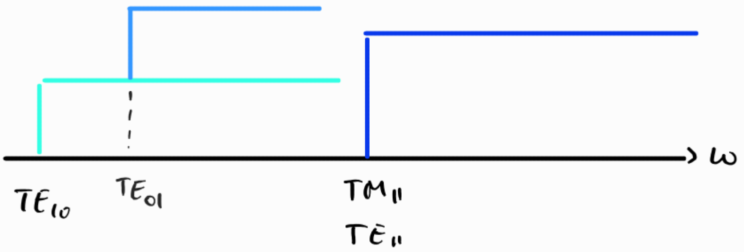
i modi m e n possono annullarsi singolarmente (ma non contemporaneamente sennò ricado nel caso TEM)

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{J\omega\mu k_y}{k_c^2} B\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-J\beta z} \\ E_y = -\dfrac{J\omega\mu k_x}{k_c^2} B\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-J\beta z} \\ H_x = \dfrac{J\beta k_x}{k_c^2} \cdot B\sin(k_x x)\cos(k_y y)e^{-J\beta z} \\ H_y = \dfrac{J\beta k_y}{k_c^2} B\cos(k_x x)\sin(k_y y)e^{-J\beta z} \end{cases}$$

($E_z = 0$ in quanto TE)

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$



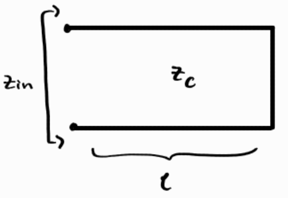
(se $\underline{a > b}$)

↳ TE_{10} modo <u>fondamentale</u> (quello che parte a freq. più bassa)

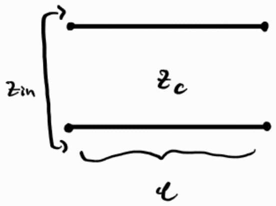
stub

- tratto di linea che mostra impedenza puramente reattiva

$$\left(z_{in}(d) = z_c \cdot \frac{z_L + jz_c \tan(\beta d)}{z_c + jz_L \tan(\beta d)} \right)$$

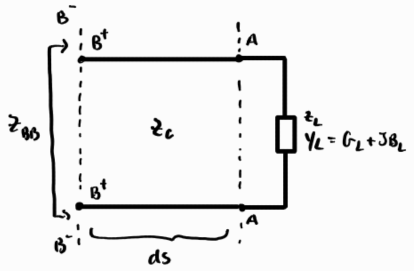


$$Z_{in} = j \cdot Z_c \tan(\beta l)$$



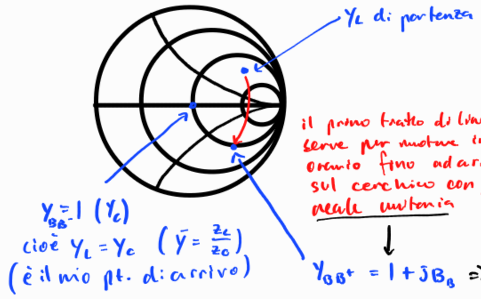
$$Z_{in} = -j \frac{Z_c}{\tan(\beta l)}$$

stub parallelo



supponiamo di voler adattare

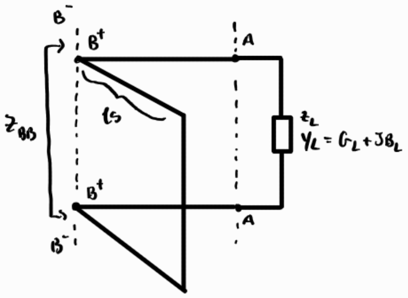
Z_L a Z_c : $Z_{BB} = Z_c$ ($Y_{BB} = Y_c$)



il primo tratto di linea mi serve per ruotare in senso orario fino ad arrivare sul cerchio con parte reale unitaria

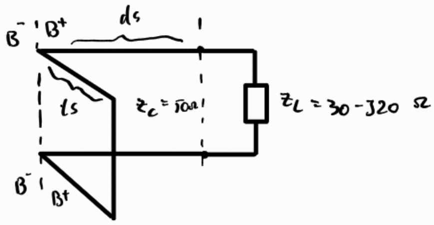
↓

$Y_{BB^+} = 1 + jB_B$ => dopodiché introduco $\bar{Y}_S = -jB_B$ t.c. ho: $\bar{Y}_S + Y_{BB^+} = 1$



2 parametri di progetto:
* ds
* lunghezza dello stub (ls)

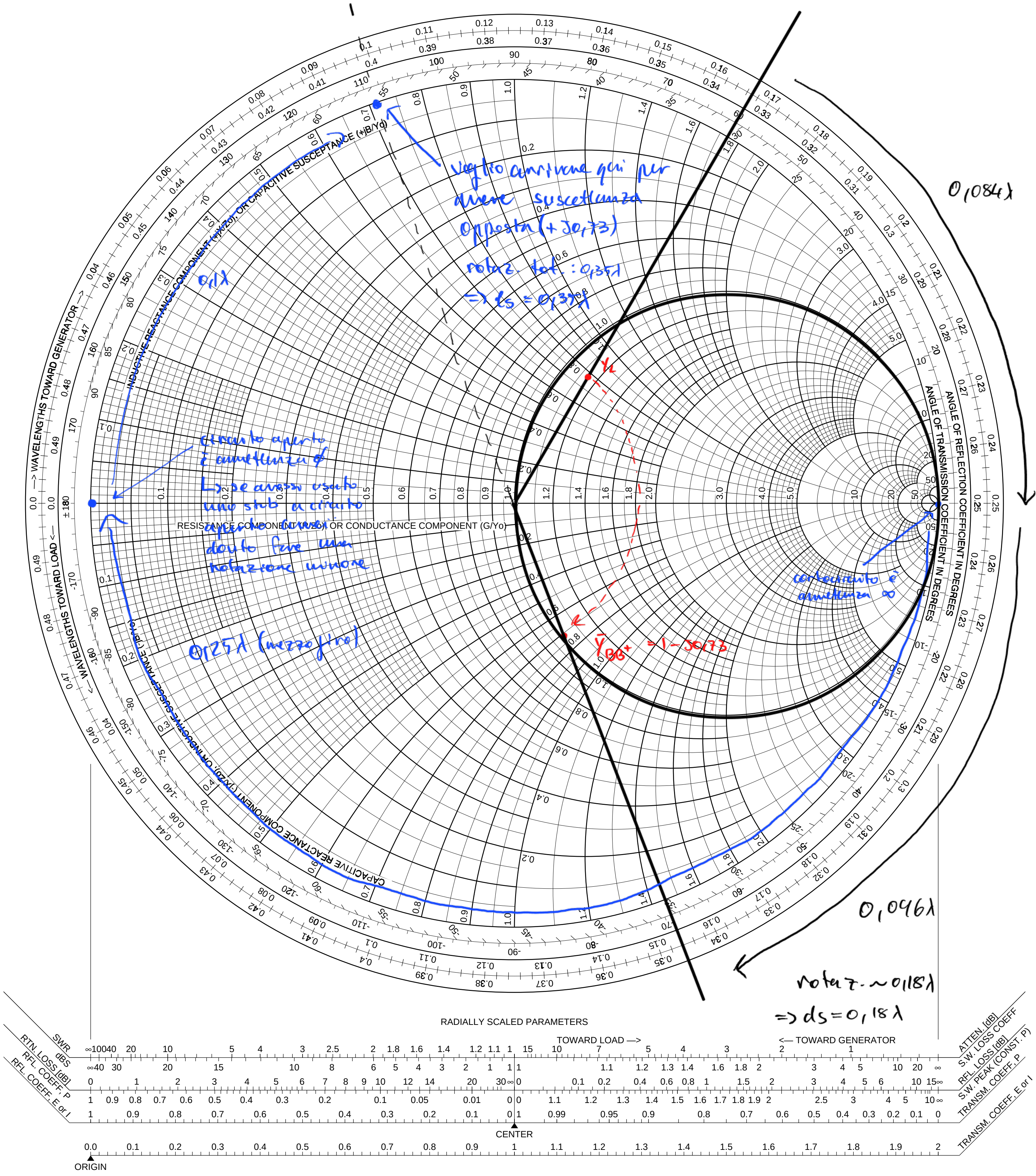
c.s. 1



$$\bar{Y}_L = \frac{Y_L}{Y_0} = \frac{\frac{1}{30-j20}}{\frac{1}{50}} = \frac{50}{30-j20} = \frac{50 \cdot (30+j20)}{30^2 + 20^2} = 1{,}15 + 0{,}77j$$

Smith Chart

by WA3VPZ



voglio arrivare qui per avere suscettanza opposta (+ j0,73)

rotaz. tot.: 0,351λ

=> ℓs = 0,351λ

0,1λ

circuito aperto è ammettenza ∅

L> se avessi usato uno stub a circuito aperto avrei dovuto fare una rotazione minore

0,125λ (mezzo giro)

Y_L

$\bar{Y}_{BB'} = 1 - j0,73$

cortocircuito è ammettenza ∞

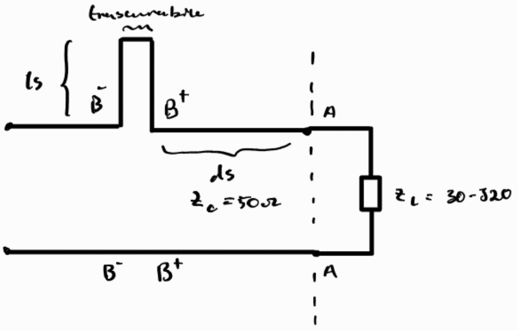
0,084λ

0,096λ

rotaz. ~ 0,18λ

=> ds = 0,18λ

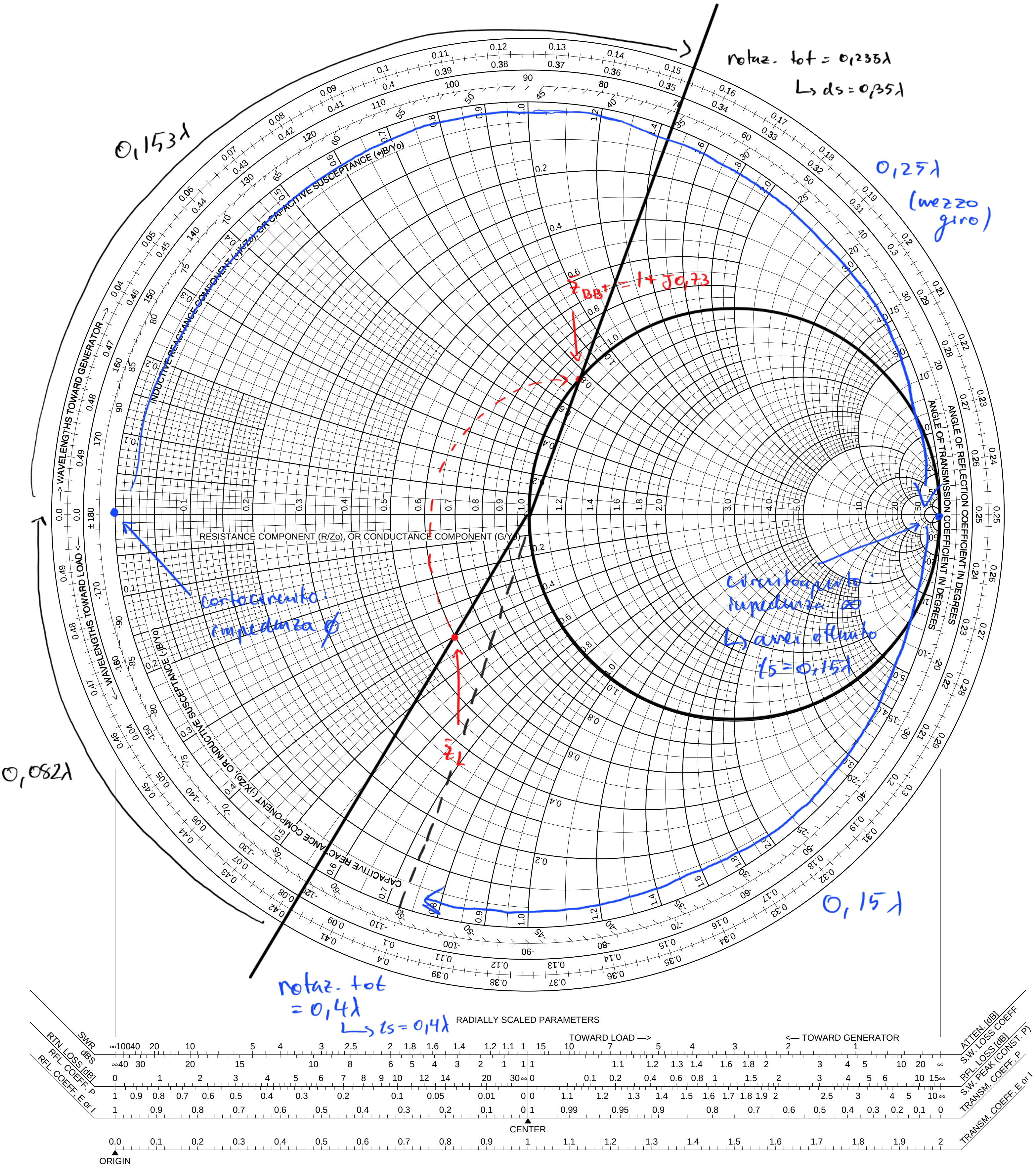
stub serie



$$\bar{z}_L = \frac{z_L}{z_c} = 0{,}6 - j0{,}4$$

Smith Chart

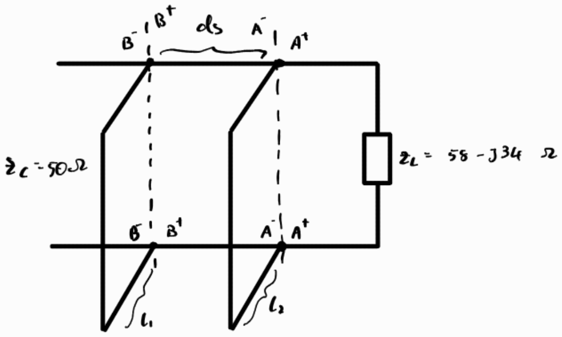
by WA3VPZ



- un inconveniente è che la ds varia in base alla rotaz. (regolare ls non è un problema), che potrebbe essere un fastidio nella realizzazione fisica di un circuito

  ↳ in una struttura a <u>doppio stub</u>

doppio stub



$\nu = 1GHz$
$ds = 9cm$

stub // $\Rightarrow$ uso ammettenze $\Rightarrow Y_L = 0,013 + j0,0075$

$\Rightarrow \bar{Y}_L = \dfrac{Y_L}{Y_C} = 0,64 + j0,38 \ \Omega$

$\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 30cm$

in AA^+ : siamo in $\bar{Y}_L$

stub 1 ↓

lo stub agisce sulla parte immaginaria (ha suscettanza puramente immaginaria)

in AA^- : siamo in $\bar{Y}_{AA^-} = 0,64 + jb_{AA}$

tratto di linea ds ↓

in BB^+ : siamo in $\bar{Y}_{BB^+} = 1 + jb_{BB}$

stub 2 ↓

in BB^- : siamo in $\bar{Y}_{BB^-} = 1 \quad (Z_C = Z_L)$

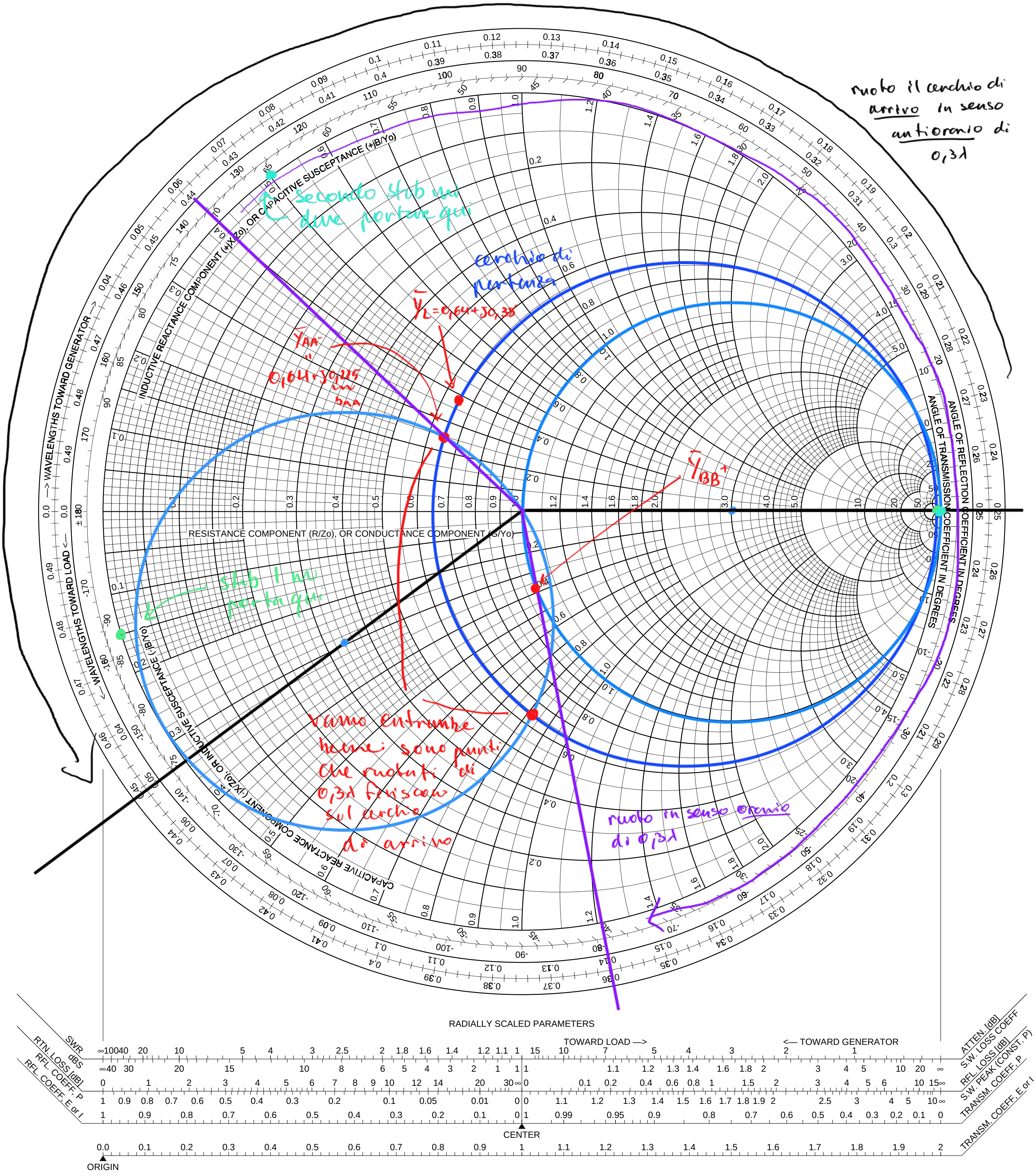
$ds = 9cm \Rightarrow ds = \dfrac{9}{30}\lambda = 0,3\lambda$ (rotaz. oraria)

- dobbiamo individuare il punto sul cerchio a parte reale 0,64, che, ruotato di $0,3\lambda$ finisca sul cerchio a parte reale unitaria

cerchio di partenza: $Re[\,] = 0,64$
cerchio di destinaz.: $Re[\,] = 1$

Smith Chart

by WA3VPZ



ruoto il cerchio di arrivo in senso antiorario di 0,3λ

secondo stub qui
due portare qui

cerchio di partenza

$\bar{Y}_L = 0,64 + j0,38$

$\bar{Y}_{AA^-}$ = 0,64 + j0,225 = b_{AA}

$\bar{Y}_{BB^+}$

stub 1 qui
porta qui

vanno entrambe bene: sono punti che ruotati di 0,3λ finiscono sul cerchio di arrivo

ruoto in senso orario di 0,3λ

stub 1: mi deve far passare da 0,38 a 0,225 (parte imm.)

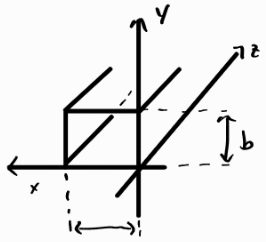
$\Rightarrow$ stub 1 dovrà avere una suscettanza di 0,155

stub 2: mi deve far passare da 0,4 a 0

stub ① (cortocircuito) $\Rightarrow$ ruoto $0{,}226\lambda = l_1$

stub ② (cortocircuito) $\Rightarrow$ ruoto $0{,}324\lambda = l_2$

(posso anche farli in c.a, o uno c.a. e uno c.c., o uno serie e uno parallelo, ecc. ecc.)



può supportare:

TM_{mn} $(m,n \neq \emptyset) \Rightarrow TM_{11}$ è il modo minimo

TE_{mn} $(m \vee n \neq \emptyset) \Rightarrow TM_{10}$ è il modo minimo $\quad m=1; n=\emptyset \Rightarrow \begin{cases} k_x = \pi/a \\ k_y = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \nu_c = \frac{v}{2a}\ ;\ \lambda_c = 2a$

- si sceglie $b = \frac{a}{2}$ (tanto anche facendo b più grande la banda max. rimane uguale)
- inoltre fare b piccolo aumenta le perdite per effetto Joule $\Rightarrow b = \frac{a}{2}$ minimizza queste perdit

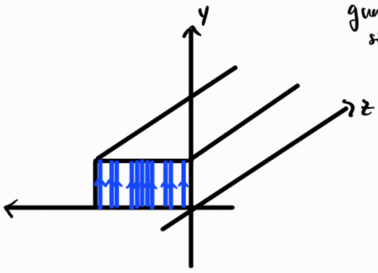
TE_{10}

$(k_x = \pi/a\ ;\ k_y = \emptyset) \Rightarrow k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_x^2 \qquad (E_z = \emptyset,$ onda TE$)$

$$\begin{cases} E_x = \emptyset \\ E_y = -\frac{J\omega\mu B}{k_x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-J\beta z} \\ H_x = \frac{J\beta B}{k_x} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-J\beta z} = -\frac{E_y}{Z_{TE_{10}}} \Rightarrow \frac{-E_0}{Z_{TE_{10}}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-J\beta z} \\ H_y = \emptyset \\ H_z = B\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-J\beta z} \end{cases}$$

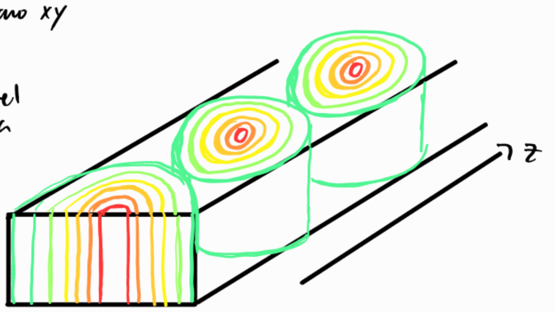
con $Z_{TE} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{k \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \quad \left(\beta(\omega) = k\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}}$$ impedenza modale



guardando Ey osservo un andamento sinusoidale lungo x sul piano xy

campo massimo nel centro e si annulla agli estremi



$\nu_c = \frac{v}{2a}\ ;\ \lambda_c = 2a$

$v_f = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}\ ;\ v_g = v\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \qquad \left(v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)$

$\lambda_{guida} = \frac{v_f}{\nu} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$

$v = \lambda\nu$

- non essendo onde TEM, <u>la config. dei campi non mi permette di def. tensione e correnti</u>

$P = \frac{1}{2} Re\left[\int_\Sigma \bar{E} \times \bar{H}^* \cdot \underset{\hat{u}_z}{\underset{\shortparallel}{\hat{u}_n}}\, d\Sigma \right]$ definisco la potenza trasportata dall'onda all'interno della guida come flusso del vett. di Poynting

$\bar{E} \times \bar{H}^*$:
- $E_y \times H_z$ diretto come $\hat{u}_x \Rightarrow \hat{u}_x \cdot \hat{u}_z = \emptyset$
- $E_y \times H_x$ diretto come $-\hat{u}_z \Rightarrow -\hat{u}_z \cdot \hat{u}_z \neq \emptyset$ $(=-1)$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2} Re\left[-\int_\Sigma E_y H_x^* \, d\Sigma \right] = \frac{1}{2} Re\left[\int_0^a \int_0^b \frac{|E_0|^2}{Z_{TE_{10}}} \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx\,dy \right]$

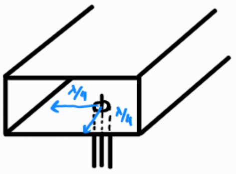
$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{|E_0|^2}{Z_{TE_{10}}} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{|E_0|^2 \cdot b \cdot a}{4 Z_{TE_{10}}}}$$

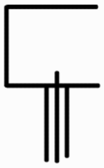
si trova anche che $\boxed{\alpha_c = \frac{R_s \cdot Z_{TE_{10}}}{\eta^2 a b}\left(a + \frac{b\lambda^2}{2a^2}\right)}$ $\left[\frac{Np}{m}\right]$

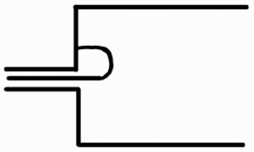
al dim. di b, aumenta l'attenuaz. (perciò non si fa b troppo piccolo)

come accoppiamo una linea TEM con una non TEM?



(accoppiamento col campo E)

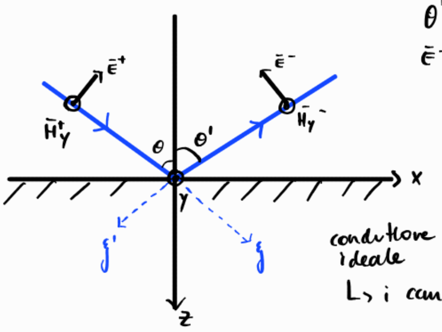




(accoppiamento campo H)

Incidenza obliqua di onde TEM (su un conduttore)

caso TM



$\theta' = ?$

$\bar{E}^- = ?$

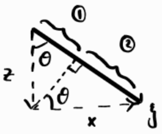
conduttore ideale

↳ i campi non penetrano ⇒ non c'è trasmissione

nel semispazio sup.:

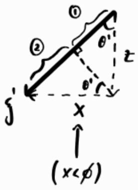
$$\bar{E}(x,z) = \bar{E}^+(x,z) + \bar{E}^-(x,z) = \bar{E}^+(0,0)e^{-j\beta\xi} + \bar{E}^-(0,0)e^{+j\beta\xi}$$

scompongo ξ lungo x e z:



$\xi = ① + ② = x\cos\theta + z\sin\theta$

analogamente ξ':



$\xi' = -x\sin\theta' + z\cos\theta'$

$$\begin{cases} \bar{E}^+(0,0) = E^+(0,0)\cdot\cos\theta\,\hat{u}_x - E^+(0,0)\sin\theta\,\hat{u}_z \\ \bar{E}^-(0,0) = -E^-(0,0)\cdot\cos\theta'\,\hat{u}_x - E^-(0,0)\sin\theta'\,\hat{u}_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x(x,z) = E^+\cos\theta\, e^{-j\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} - E^-\cos\theta'\, e^{+j\beta(-x\sin\theta' + z\cos\theta')} \\ E_z(x,z) = -E^+\sin\theta'\, e^{-j\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} - E^-\sin\theta'\, e^{+j\beta(-x\sin\theta' + z\cos\theta')} \\ H_y(x,z) = H^+ e^{-j\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} + H^- e^{+j\beta(x\sin\theta + t\cos\theta)} \end{cases}$$

$\eta = \frac{E^+}{H^+}$; $\eta = \frac{E^-}{H^-}$

in $z=0$, $\forall x \Rightarrow E_x(x,0)=0$ (condiz. al contorno)

$\Rightarrow E^+\cos\theta\, e^{-j\beta x\sin\theta} = E^-\cos\theta'\, e^{-j\beta x\sin\theta'}$ può esser vero $\Leftrightarrow -j\beta x\sin\theta = -j\beta x\sin\theta'$

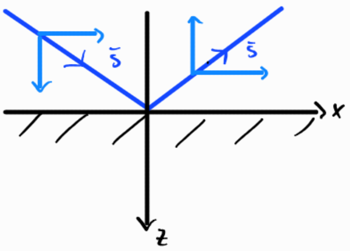
$$\Rightarrow \boxed{\theta=\theta'}$$

ne consegue che $\boxed{E^+=E^-}$

$$\begin{cases} E_x(x,z) = E^+\cos\theta\, e^{-j\beta(x\sin\theta+z\cos\theta)} - E^-\cos\theta'\, e^{+j\beta(-x\sin\theta'+z\cos\theta')} \\ E_z(x,z) = -E^+\sin\theta\, e^{-j\beta(x\sin\theta+z\cos\theta)} - E^-\sin\theta'\, e^{+j\beta(-x\sin\theta'+z\cos\theta')} \\ H_y(x,z) = H^+ e^{-j\beta(x\sin\theta+z\cos\theta)} + H^- e^{+j\beta(-x\sin\theta'+z\cos\theta')} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E^+\cos\theta\left[e^{-j\beta z\cos\theta} - e^{+j\beta z\cos\theta}\right]e^{-j\beta x\sin\theta} \\ E_z = -E^+\sin\theta\left[e^{-j\beta z\cos\theta} + e^{+j\beta z\cos\theta}\right]e^{-j\beta x\sin\theta} \\ H_y = \frac{E^+}{\eta}\left[e^{-j\beta z\cos\theta} + e^{+j\beta z\cos\theta}\right]\cdot e^{-j\beta x\sin\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -2jE^+\cos\theta\cdot\sin(\beta z\cos\theta)\cdot e^{-j\beta x\sin\theta} \\ E_z = -2E^+\sin\theta\cos(\beta z\cos\theta)\, e^{-j\beta x\sin\theta} \\ H_y = \frac{2E^+}{\eta}\underbrace{\cos(\beta z\cos\theta)}_{\text{termine onda puramente staz. lungo } z}\underbrace{e^{-j\beta x\sin\theta}}_{\text{propagaz. nel verso positivo asse } x} \end{cases}$$



$\bar{S}_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_x \times H_y^*\right] = 0$

cioè lungo z non c'è flusso netto di potenza reale

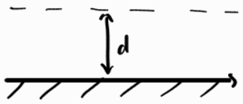
$\bar{S}_x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_z \times H_y^*\right] \neq 0$

ho propagaz./flusso netto di densità di potenza lungo l'asse x

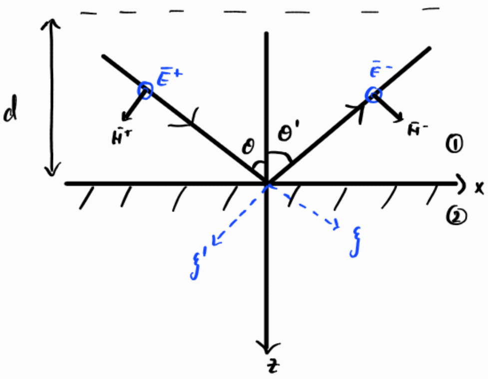
$E_x(x,0)=0$
$E_x(x,d)=0$ $\quad \forall x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\beta z\cos\theta)=0$

$\hookrightarrow \beta z\cos\theta = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}d\cos\theta = n\pi \Rightarrow d = n\frac{\lambda}{2\cos\theta}$

a multipli di questa distanza è come se ci fosse un piano conduttore perché si annulla la comp. tangente E_x



caso TE



$$\begin{cases} E_y(x,z) = E^+ e^{-J\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} + E^- e^{+J\beta(-x\sin\theta' + z\cos\theta')} = \\ H_x(x,z) = -\frac{E^+}{\eta}\cos\theta\, e^{-J\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} + \frac{E^-}{\eta}\cos\theta' e^{+J\beta(-x\sin\theta' + z\cos\theta')} \\ H_z(x,z) = \frac{E^+}{\eta}\sin\theta\, e^{-J\beta(x\sin\theta + z\cos\theta)} + \frac{E^-}{\eta}\sin\theta' e^{J\beta(-x\sin\theta' + z\cos\theta')} \end{cases}$$

Condiz. al contorno : in $z = \emptyset, \forall x \Rightarrow E_y(x,0) = \emptyset \Rightarrow E^+ e^{-J\beta x\sin\theta} = -E^- e^{-J\beta x \sin\theta'}$

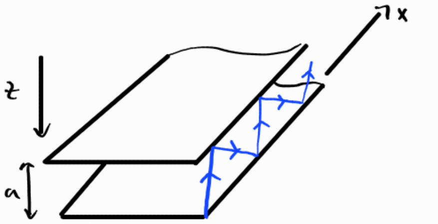
$\Rightarrow$ $\theta = \theta'$; $E^+ = -E^-$

In $d = \frac{n\lambda}{2\cos\theta}$ si cancella E_y (come nel caso TM)

chiamo $\begin{cases} \beta_x = \beta\sin\theta \\ \beta_z = \beta\cos\theta \end{cases}$

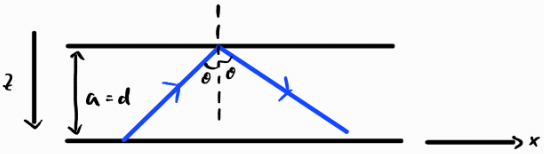
$$\begin{cases} E_y = -2JE^+\sin(\beta z\cos\theta)e^{-J\beta x\sin\theta} \\ H_x = -\frac{2E^+}{\eta}\cos\theta\cos(\beta z\cos\theta)e^{-J\beta x\sin\theta} \\ H_z = \frac{-2JE^+}{\eta}\sin\theta\,\underbrace{\sin(\beta z\cos\theta)}_{\text{onda puramente staz. lungo z}}\underbrace{e^{-J\beta x\sin\theta}}_{\text{onda viaggiante lungo x}} \end{cases}$$

interpretaz. onde guidate tra piani conduttori come sovrapposizione di onde piane



supporta onde non TEM
con modi TM_m v TE_m.

Vedremo i modi come una onda TEM che rimbalza tra le guide

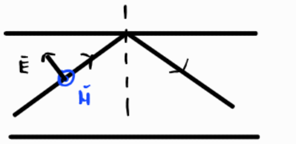


$a = d = m\frac{\lambda}{2\cos\theta_m}$ distanza a cui si annulla il campo E

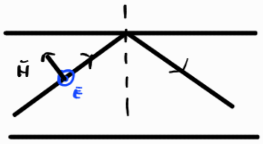
$\Rightarrow \cos\theta_m = m\frac{\lambda}{2a}$ $\lambda_c = \frac{2a}{m}$

$= \frac{\lambda}{\lambda_c}$

$= \frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow \omega < \omega_c \Rightarrow \cos\theta_m = \frac{\omega_c}{\omega} > 1 \Rightarrow$ non si può propagare l'onda



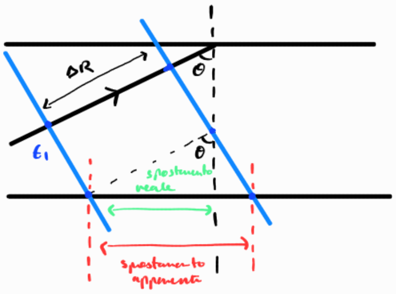
Ē ha componente nel verso di propagaz. => cioè è quella che avevamo chiamato modo TM_m (che avevamo visto essere onda non TEM)



analogamente qui osserviamo il modo TE_m

- in entrambi i casi, li interpreto invece come un'onda TEM che incide in modo obliquo, polarizzata TE o TM

- cioè la differenza tra una linea di trasmissione TEM e una non TEM è che nella TEM, l'onda TEM si propaga dritta lungo la linea, mentre nella linea non TEM è sempre un'onda TEM a propagarsi, ma in direz. obliqua



$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta R}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\Delta T} = v_f$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{v}{\sin\theta} = \frac{v}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \geqslant v$$

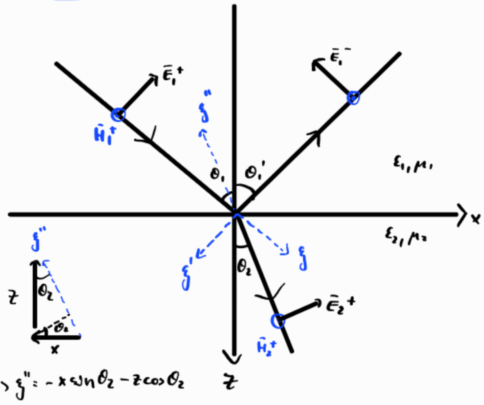
$\downarrow$

è una velocità lungo x apparente: è la velocità che dovrebbe avere un'osservatore lungo l'asse x per inseguire la sup. equifase

$$\Rightarrow v_g = v \cdot \sin\theta = v \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

Incidenza obliqua - mezzi dielettrici

caso TM



$$\Rightarrow \xi'' = -x\sin\theta_2 - z\cos\theta_2$$

$$E_1 = E_1^+ + E_1^- = E_1^+(0,0)e^{-j\beta\xi} + E_1^-(0,0)e^{+j\beta\xi'}$$

$$= E_1^+ e^{-j\beta(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)} + E_1^- e^{+j\beta(-x\sin\theta_1' + z\cos\theta_1')}$$

$$\Rightarrow \text{mezzo } ① \begin{cases} E_{1x} = E_1^+\cos\theta_1\, e^{-j\beta_1(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)} - E_1^-\cos\theta_1'\, e^{+j\beta_1(-x\sin\theta_1' + z\cos\theta_1')} \\ E_{1z} = -E_1^+\sin\theta_1\, e^{-j\beta_1(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)} - E_1^-\sin\theta_1'\, e^{+j\beta_1(-x\sin\theta_1' + z\cos\theta_1')} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{mezzo } ② \begin{cases} E_{2x} = E_2^+\cos\theta_2\, e^{+j\beta_2(-x\sin\theta_2 - z\cos\theta_2)} \\ E_{2z} = -E_2^+\sin\theta_2\, e^{+j\beta_2(-x\sin\theta_2 - z\cos\theta_2)} \end{cases}$$

In $z = \phi$, $\forall x \Rightarrow E_{1x}(x,0) = E_{2x}(x,0) \Rightarrow E_1^+\cos\theta_1\, e^{-j\beta_1 x\sin\theta_1} - E_1^-\cos\theta_1'\, e^{+j\beta_1 z\sin\theta_1'} = E_2^+ e^{-j\beta_1 z\sin\theta_2}$ $\forall x$

per cui $\Rightarrow \beta_1\sin\theta_1 = \beta_1\sin\theta_1' = \beta_2\sin\theta_2$

$\Rightarrow \theta_1' = \theta_1$ e inoltre $\beta_1 \sin\theta_1 = \beta_2 \sin\theta_2$

$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \omega\underbrace{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}_{n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \sin\theta_1 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\,\sin\theta_2 \Rightarrow n_1\sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

def. impedenza d'onda: $Z_{z1} = \dfrac{E_{1x}^+}{H_{1y}^+} = -\dfrac{E_{1x}^-}{H_{1y}^-}$ $\quad Z_{z2} = \dfrac{E_{2x}^+}{H_{2y}^+}$

$$Z_{z1} = \frac{E_1^+\cos\theta_1}{H_1^+} = \eta_1\cos\theta_1$$

$$Z_{z2} = \frac{E_2^+\cos\theta_2}{H_2^+} = \eta_2\cos\theta_2 = \eta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \eta_2\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\sin^2\theta_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1x}^+(x,0) + E_{1x}^-(x,0) = E_{2x}^+(x,0) \\ H_{1y}^+(x,0) + H_{1y}^-(x,0) = H_{2y}^+(x,0) \end{cases}$$

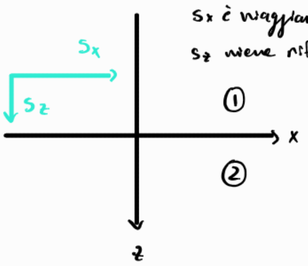
(condiz. al contorno – la componente tangente si deve conservare)

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1x}^+(x,0) + E_{1x}^-(x,0) = E_2^+(x,0) \\ \dfrac{E_{1x}^+}{Z_{z1}} - \dfrac{E_{1x}^-(x,0)}{Z_{z1}} = \dfrac{E_{2x}^+(x,0)}{Z_{z2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1x}^- = \Gamma\cdot E_{1x}^+ \\ E_{2x}^+ = T E_{1x}^+ \end{cases}$$

con $\Gamma = \dfrac{Z_{z2}-Z_{z1}}{Z_{z2}+Z_{z1}}$ e $T = 1+\Gamma = \dfrac{2Z_{z2}}{Z_{z2}+Z_{z1}}$

campi totali nel mezzo ① $\Rightarrow$

$$\begin{cases} E_x(x,z) = E_1^+\cos\theta_1\, e^{-J\beta_{1x}x}\cdot\left[e^{-J\beta_{1z}z} + \Gamma e^{+\beta_{1z}z}\right] \\ E_z(x,z) = E_1^+\sin\theta_1\, e^{-J\beta_{1x}x}\cdot\left[-e^{-J\beta_{1z}z} + \Gamma e^{J\beta_{1z}z}\right] \\ H_y(x,z) = \dfrac{E_1^+}{\eta_1}\underbrace{e^{-J\beta_{1x}x}}_{\text{onda prog. verso } x}\cdot\underbrace{\left[\underbrace{e^{-J\beta_{1z}z}}_{\text{onda prog. verso } z} - \underbrace{1\, e^{J\beta_{1z}z}}_{\text{onda rif. lungo } z}\right]}_{\text{in generale ho un'onda stazionaria ma non puramente perchè ampiezza onda incidente} \neq \text{onda riflessa } (\Gamma\neq 1 \text{ in gen.})} \end{cases}$$



Sx è viaggiante
Sz viene riflessa

riflessione tot. per $|\Gamma| = 1 \Rightarrow |\Gamma| = 1$ se Z_{z2} puramente immaginario ?

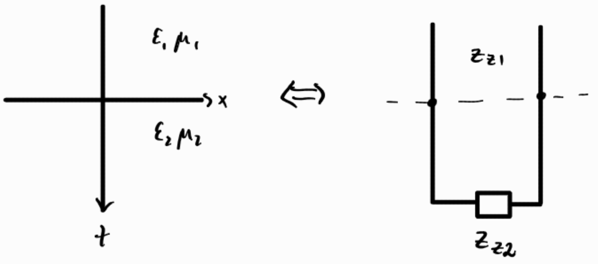
Z_{z2} puramente imm. se $1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow \sin\theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow (\theta_1)_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ angolo critico

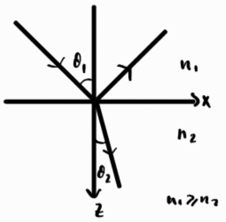
se $|\Gamma|=1$, Γ complx., non è detto che $T = 1+\Gamma = 0$

↳ cioè, se l'onda è tutta riflessa, non è detto che i campi sono nulli nel mezzo 2!

$\Rightarrow$ si ha un'onda evanescente

analogia con le linee di trasmissione:





ci poniamo nella condizione di TIR $\Rightarrow \theta_1 \geq \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

$\Rightarrow \sin\theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1}$

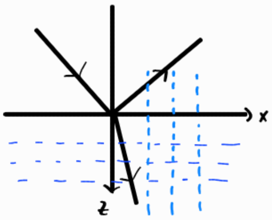
$\beta_{1x} = \beta_{2x}$ altrimenti le condiz. al contorno non sono soddisfatte $\forall x$

$\Rightarrow k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \underbrace{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$

$$\beta_{2z} = k_2 \cos\theta_2 = k_2 \sqrt{1-\sin^2\theta_2} \overset{\downarrow}{=} k_2 \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}$$

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 \geq \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 1 \quad (\text{TIR}) \Rightarrow k_2 \underbrace{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}}_{\leq 0} \Rightarrow \beta_{2z} = -j k_2 \underbrace{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 - 1}}_{\alpha_{2z}} = -j\alpha_{2z}$$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-j\beta_{2z} z} = e^{-\alpha_{2z} z} & \text{l'onda si attenua lungo } z \\ e^{-j\beta_{2x} x} & \text{l'onda si sfasa lungo } x \end{cases}$ $\Rightarrow$ <u>onda evanescente</u>

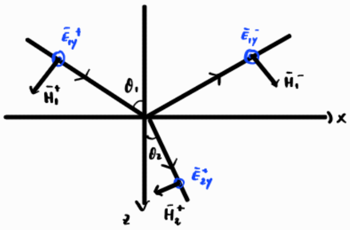


tutta la densità di pot. è riflessa $\Rightarrow$ l'attenuazione non è legata alla dissipazione di potenza ma alla riflessione

sup. equiampiezza $\Rightarrow$ z cost.
sup. equifase $\Rightarrow$ x cost.

sup. equipot. $\neq$ sup. equifase $\Rightarrow$ onda evanescente

caso TE



condiz. al contorno : $\begin{cases} E_{1y}^+ + E_{1y}^- = E_{2y}^+ \\ H_{1x}^+ + H_{1x}^- = H_{2x}^+ \end{cases}$

$\Gamma = \frac{E_{1y}^-}{E_{1y}^+}$; $T = \frac{E_{2y}^+}{E_{1y}^+}$ (z_L) $z_{z2} = -\frac{E_{2y}^+}{H_{2x}^+}$; $z_{z1} = -\frac{E_{1y}^+}{H_{1x}^+}$ (segni meno per rispettare la regola della mano dx)

$$z_L = -\frac{E_{1y}^+}{H_2^+ \cos\theta_2} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_2} = \frac{\eta_2}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}}$$

$$z_{z1} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_1}$$

- ciò che abbiamo trovato per l'onda TM si applica ugualmente per l'onda TE

campi nella regione ① :

$$\begin{cases} E_y = E_1^+ e^{-j\beta_{1x} x} \cdot \left[e^{-j\beta_{1z} z} + \Gamma e^{+j\beta_{1z} z}\right] \\ H_x = -\frac{E_1^+}{\eta_1} \cos\theta_1 \, e^{-j\beta_{1x} x} \cdot \left[e^{-j\beta_{1z} z} - \Gamma e^{+j\beta_{1z} z}\right] \\ H_z = \frac{E_1^+}{\eta_1} \sin\theta_1 \, e^{-j\beta_{1x} x} \cdot \left[e^{-j\beta_{1z} z} + \Gamma e^{j\beta_{1z} z}\right] \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} \beta_{1x} = k_1 \sin\theta_1 \\ \beta_{1z} = k_1 \cos\theta_1 \end{cases}$$

rifrazione (trasmissione) totale $(\Gamma = 0)$

$$\Gamma = \frac{z_L - z_{z1}}{z_L + z_{z2}} = 0 \Rightarrow z_L = z_{z1} \Rightarrow \eta_1 \cos\theta_1 = \eta_2 \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \sin^2\theta_1}$$

$(n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, con $\mu_r = 1)$

$\left(\eta = \frac{\eta_0}{n} \text{ se } \mu_r = 1\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_p = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$ angolo di Brewster

per il caso TE $\nexists$ sol.! $\Rightarrow$ $\exists \Leftrightarrow \mu_1 \neq \mu_2$ (mezzi magnetici)

μ_0, ε_0 | μ_1, ε_1

$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ | $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \eta_0$

materiali anecoici $\Rightarrow$ eliminano le riflessioni
vengono usati come assorbitori

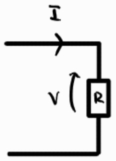
teoria della radiazione

- algoritmo per calc. $\bar{E}$ e $\bar{H}$ in modo $\underbrace{\text{semplice}}_{\text{riferito alle sorgenti}}$

cause: SORGENTI
⇓
ALGORITMO
⇓
effetti: CAMPI

- il problema è sviluppare un algoritmo che usi sorgenti semplici da determinare

e.s.



$\overset{\text{effetto}}{V} = \overset{\text{causa}}{I} \cdot R$

algoritmo (moltiplicaz. per R)

l'algoritmo per se è semplicissimo, ma misurare la corrente circuitalmente è scomodo

↳ $\underset{\text{effetto}}{I} = \frac{1}{R} \underset{\text{causa}}{V}$ è meglio, la causa è più facile da determinare

sorgenti della radiazione:

* cariche elettriche che si muovono con moto accelerato – difficile da det.!
$\Rightarrow$ (densità di) correnti su conduttori sono più facili da determinare

I) eq. di Maxwell
II) otteniamo $\nabla^2 \bar{E} + \beta^2 \bar{E} = \text{SORGENTI} \Leftarrow$ (complicate)
III) troveremo una sol. del d'Alambertiano $\mathcal{L} = \nabla^2 + \beta^2$
IV) introduciamo un potenziale vettore $\bar{A}$
V) otteremo $\nabla^2 \bar{A} + \beta^2 \bar{A} = \text{SORGENTI} \Leftarrow$ (semplici)
VI) da $\bar{A}$ otteniamo $\bar{E}, \bar{H}$
VII) sorgenti elementare: DIPOLO HERTZIANO

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J} \Leftarrow \underbrace{\sigma\bar{E} + \bar{J}_I} \\ \nabla \cdot \bar{E} = \rho/\varepsilon \\ \nabla \cdot \bar{H} = \emptyset \\ \nabla \cdot \bar{J} = -j\omega\rho \end{cases}$$

nella causa compare l'effetto: in realtà non è un problema, la $\bar{J}_I$ è indistinguibile da $\sigma\bar{E}$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla \times \nabla \times \bar{E}} = -j\omega\mu \nabla \times \bar{H} = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\bar{E} + \bar{J})$$

applico il rotore alla prima eq.

$$\Downarrow$$

$$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \bar{E}}_{\neq \emptyset}) - \nabla^2 \bar{E} = \omega^2 \mu\varepsilon\bar{E} - j\omega\mu\bar{J}$$

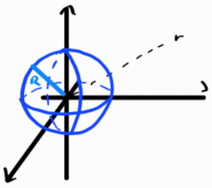
siamo in presenza di sorgenti

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) - \nabla^2 \bar{E} = \overbrace{\omega^2\mu\varepsilon}^{= \beta^2 \ (\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon})} \bar{E} - j\omega\mu\bar{J}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla^2 \bar{E} + \beta^2 \bar{E}}_{\text{effetto}} = \underbrace{\frac{\nabla(\nabla \cdot \bar{J})}{J\omega\varepsilon} + J\omega\mu\bar{J}}_{}$$

sorgenti ("complicati"): $\bar{J}$ è semplice da det, ma il gradiente della divergenza di $\bar{J}$ non lo è

<u>operatore</u> d'Alambertiano : $\mathcal{L} = \nabla^2 + \beta^2$



Ψ campo scalare generico per una sorgente puntiforme elementare a simmetria sferica

soluz. statica $\Rightarrow \omega \to 0,\ \beta \to 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi(r) = $ sorgente

(il d'Alambertiano coincide con il Laplaciano)

$$\Rightarrow \nabla^2 \Psi(r) = \begin{cases} -S & \text{per } r \le R \Rightarrow \text{sol. \underline{interna}} \\ 0 & \text{per } r > R \Rightarrow \text{sol. \underline{esterna}} \end{cases}$$

condizioni: $\Psi(r)$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ continue (soluzione sensata fisicamente)

$r \le R$

coordinate polari $\Rightarrow \nabla^2 \Psi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[r^2 \cdot \frac{d\Psi}{dr}\right] = -S \Rightarrow r^2 \frac{d\Psi}{dr} = -S\frac{r^3}{3} + A \Rightarrow \Psi(r) = -S\frac{r^2}{6} - \frac{A}{r} + B$

integro in dr   integro in dr

$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0\right.$ per simmetria$\left.\right)$

$r > R$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{d\Psi}{dr}\right] = 0 \overset{\int}{\Rightarrow} r^2 \frac{d\Psi}{dr} = C \overset{\int}{\Rightarrow} \Psi(r) = -C \cdot \frac{1}{r} + D$$

$\lim_{r \to \infty} \Psi(r) = 0 \Rightarrow D = 0$ (deve andare a 0 l'effetto)

$\lim_{r \to 0} \Psi(r) \neq \infty \Rightarrow A = 0$ (non può divergere)

per $r = R \Rightarrow \Psi(r), \frac{d\Psi}{dr}$ continue

$$\hookrightarrow \begin{cases} \Psi(r) = S\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}r^2\right) & r \le R \\ \Psi(r) = S \cdot \frac{R^3}{3r} & r > R \end{cases}$$

$$\Psi(r) = S \cdot \frac{R^3}{3r} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{S}{4\pi r} = \frac{\overset{\text{volume}}{V} \cdot S}{4\pi r}$$

<u>elettrostatica</u>

$$\nabla^2 \Psi(r) = \underbrace{-\frac{\rho}{\varepsilon}}_{-S} \quad ; \quad S = \rho/\varepsilon \quad \Rightarrow \Psi(r) = \frac{V \cdot \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

regime dinamico:

$$\nabla^2 \Psi(r) + \beta^2 \Psi(r) = \begin{cases} -S & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

adesso S è un fasore, la sorgente è pulsante cioè nel dominio del tempio varia col $\cos(\omega t)$

sol. esterna $\Rightarrow \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{d\Psi}{dr}\right] + \beta^2 \Psi = 0$

poniamo $X = \Psi(r) \cdot r \Rightarrow \Psi(r) = \frac{X}{r}$

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\cdot\frac{d\psi}{dr}\right]+\beta^2\psi=0$$

$$\chi = r\psi \Rightarrow \psi = \frac{\chi}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\cdot\left(\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr}-\frac{\chi}{r^2}\right)\right]+\beta^2\psi=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left[r\cdot\frac{d\chi}{dr}-\chi\right]+\beta^2\psi=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\left[1\cdot\cancel{\frac{d\chi}{dr}}+r\cdot\frac{d^2\chi}{dr^2}-\cancel{\frac{d\chi}{dr}}\right]+\beta^2\psi=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2\chi}{dr^2}+\beta^2\underset{\overset{\uparrow}{=\frac{\chi}{r}}}{\psi}=0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2}+\beta^2\frac{\chi}{r}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\chi}{dr^2}+\beta^2\chi=0}$$

ammette sol. $\chi(r) = Me^{-J\beta r}+Ne^{J\beta r} \Rightarrow \boxed{\psi(r) = \underbrace{M\frac{e^{-J\beta r}}{r}}_{\text{termine centrifugo}}+\underbrace{N\frac{e^{+J\beta r}}{r}}_{\text{termine centripeto}}}$

termine centrifugo: fase si ritarda allontanandosi dalla sorgente

termine centripeto: fase si anticipa (effetto precede la causa), cioè è un termine anticausale => non ha senso fisicamente

↳ $N = 0$ (si può dim. rigorosamente con le condiz. al contorno di Sommerfield)

$\psi(r) = \frac{s\cdot V}{4\pi r}$ (sol. esterna caso statico) => si deve raccordare con la sol. dinamica appena trovata per $\nu \to 0$

se $\nu \to 0$, $\beta \to 0 \Rightarrow e^{-J\beta r} \longrightarrow 1$

↳ $\psi(r) = \frac{sV}{4\pi r} = \frac{M}{r} \Rightarrow M = \frac{s\cdot V}{4\pi} \Rightarrow \boxed{\psi(r) = \frac{sV}{4\pi r}e^{-J\beta r}}$

potenziale vettore

sappiamo che: $\nabla\cdot\bar{H} = 0$

$\Rightarrow$ considero $\bar{H} = \nabla\times\bar{A} \Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\bar{A}) \equiv 0 \ \forall\bar{A}$

$$\Rightarrow \nabla\times\bar{E} = -J\omega\mu\bar{H} = -J\omega\mu\nabla\times\bar{A} \Rightarrow \nabla\times(\underbrace{\bar{E}+J\omega\mu\bar{A}}_{\text{questo termine è irrotazionale}})=0$$

=> posso scriverlo come gradiente di un campo scalare (def. un "potenziale")

$$\Rightarrow \bar{E}+J\omega\mu\bar{A} = \underset{\overset{\uparrow}{\text{segno meno arbitrario, è per comodità}}}{-}\nabla\phi \Rightarrow \bar{E} = -\nabla\phi - J\omega\mu\bar{A}$$

$$\nabla\times\bar{H} = J\omega\varepsilon\bar{E}+\bar{J} \underset{\overset{\uparrow}{\bar{H}=\nabla\times\bar{A}}}{\Rightarrow} \nabla\times\nabla\times\bar{A} = J\omega\varepsilon(-\nabla\phi-J\omega\mu\bar{A})+\bar{J} \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A} = -J\omega\varepsilon\nabla\phi+\underbrace{\omega^2\mu\varepsilon}_{\substack{\beta^2 \\ (\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon})}}\bar{A}+\bar{J}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\nabla^2\bar{A}+\beta^2\bar{A}}_{\text{d'Alambertiano}} = \nabla(\nabla\cdot\bar{A})+J\omega\varepsilon\nabla\phi-\bar{J}$$

in generale, un campo vett. ha 2 tipi di sorgenti:
- vorticose $(\bar{H} = \nabla\times\bar{A})$
- pozzo

le due sorgenti sono indipendenti => def. $\nabla\cdot\bar{A} = -J\omega\varepsilon\phi$ arbitrariamente in modo t.c. $\underbrace{\nabla(\nabla\cdot\bar{A})}_{-J\omega\varepsilon\nabla\phi} + J\omega\varepsilon\nabla\phi = \varnothing$

$$\Rightarrow \nabla^2\bar{A} + \beta^2\bar{A} = -\bar{J} \left(\Rightarrow \quad \bar{A}(r) = \frac{\bar{J}\,V}{4\pi r} e^{-J\beta r} \quad (\psi(r)) \right)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \bar{H} = \nabla\times\bar{A} \\ \bar{E} = -J\omega\mu\bar{A} + \frac{1}{J\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\bar{A}) \end{cases}$$

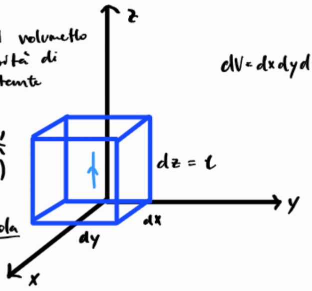
sono in grado di legare le cause ($\bar{J}$) con gli effetti ($\bar{E}$ e $\bar{H}$) tramite il campo $\bar{A}$

dipolo Hertziano

all'interno del volumetto ho una densità di corrente costante

(la sorgente, $\bar{J}$, è la densità di corrente)

<u>Hp.</u> sorgente <u>piccola</u>



$dV = dx\,dy\,dz$

$\bar{J} = J_z \cdot \hat{u}_z$

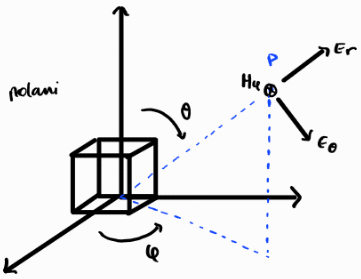
$$\bar{A}(r) = \frac{\bar{J}\,V e^{-J\beta r}}{4\pi r} = \frac{\bar{J}\,dV e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$

$$A_z(r) = \frac{J_z\,dx\,dy\,dz\,e^{-J\beta r}}{4\pi r} = \frac{I\cdot l\,e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$

dipende solo da r, non da θ o φ => <u>isotropo</u>

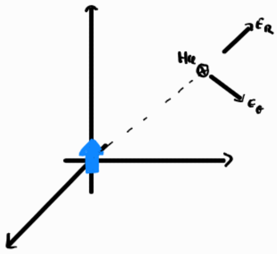
(tuttavia anche se A è isotropo i campi non lo saranno)

coordinate polari



$$\begin{cases} E_R = \frac{Il}{2\pi} e^{-J\beta r} \left(\frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{J\omega\varepsilon r^3} \right) \cos\theta \\ E_\theta = \frac{Il}{4\pi} e^{-J\beta r} \left(\frac{J\omega\mu}{r} + \frac{\eta}{r^2} + \frac{1}{J\omega\varepsilon r^3} \right) \sin\theta \\ H_\varphi = \frac{Il}{4\pi} e^{-J\beta r} \left(\frac{J\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta \end{cases}$$

caso campi "vicini"



$r \ll \lambda$; $r \longrightarrow \varnothing$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_R = \frac{I\cdot l}{J\omega 2\pi\varepsilon r^3}\cos\theta \\ E_\theta = \frac{Il}{J\omega 4\pi\varepsilon r^3}\sin\theta \end{cases}$$

("sopravvive" solo il termine più significante, $\propto 1/r^3$)

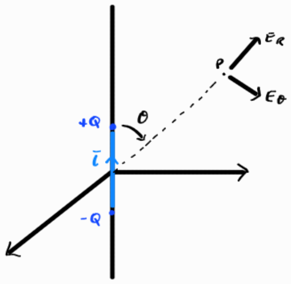
$e^{-J\beta r} \longrightarrow 1$ cioè il ritardo/sfasamento non c'è

siamo talmente vicini alla sorgente che praticamente avviene tutto istantaneamente

=> E_R, E_θ componenti "quasi statiche"

sembrano essere le componenti di un dipolo statico (pur non essendolo)

considerando un <u>dipolo elettrostatico</u>:



$$\begin{cases} E_R = \frac{Ql\cos\theta}{2\pi\varepsilon r^3} \\ E_\theta = \frac{Ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon r^3} \end{cases}$$

$I = \frac{dQ}{dt}$ => nei fasori => $I = J\omega Q$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_R = \frac{Il\cos\theta}{J\omega 2\pi\varepsilon r^3} \\ E_\theta = \frac{Il\cos\theta}{J\omega 4\pi\varepsilon r^3} \end{cases}$$

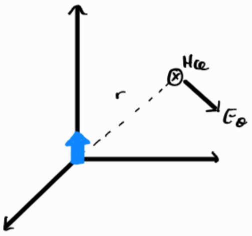
sembrerebbe proprio che nel caso di campi vicini troviamo lo stesso risultato che troviamo nel caso di dipolo elettrostatico

ma c'è una differenza => siamo nel dominio dei fasori => $A(t) = \mathrm{Re}\left[A e^{J\omega t}\right]$ ↑ fasore

cioè $Q(t) = Q\cos(\omega t)$ oscilla! => perciò diciamo "quasi" statiche; lo sembrano ma non lo sono realmente

caso campi lontani (r grande)

$$\begin{cases} E_\theta = \dfrac{J\omega\mu I l}{4\pi r} e^{-J\beta r} \cdot \sin\theta \\ H_\varphi = \dfrac{J\beta I l}{4\pi r} e^{-J\beta r} \cdot \sin\theta \end{cases}$$



$E_\theta \perp H_\varphi$

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \eta \quad (= \eta_0 \text{ nel vuoto})$$

=> $E_\theta \perp H_\varphi$, e sono in fase tra loro

somiglia ad un'onda TEM. Dobbiamo verificare però che ci sia una densità di potenza reale che viaggia nello spazio

calcoliamo il vett. di Poynting: $\bar{S} = \underbrace{\frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*}_{\text{sto considerando i contributi sia di campi lontano che di campi vicini}}$

$$\bar{E}\times\bar{H}^* = \begin{vmatrix} \hat{u}_r & \hat{u}_\theta & \hat{u}_\varphi \\ E_R & E_\theta & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & H_\varphi^* \end{vmatrix} = E_\theta H_\varphi^* \hat{u}_r - E_R H_\varphi^* \hat{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^* = \underbrace{\frac{1}{2}E_\theta H_\varphi^* \hat{u}_r}_{S_R} - \underbrace{\frac{1}{2}E_R H_\varphi^* \hat{u}_\theta}_{S_\theta})$$

$$\begin{cases} E_\theta = \dfrac{J\eta I l}{2\lambda r} e^{-J\beta r} \sin\theta \\ H_\varphi = \dfrac{J I l}{2\lambda r} e^{-J\beta r} \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_R = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\eta |Il|^2}{4\lambda^2} \left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{J\beta^3 r^5}\right) \sin^2\theta \\ S_\theta = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\eta |Il|^2}{8\pi^2} \left(-\dfrac{J\beta}{r^3} + \dfrac{1}{J\beta r^5}\right) \sin\theta \cdot \cos\theta \end{cases}$$

(riscritto E_θ e H_φ in modo diverso)

ci interessa solo la potenza reale (quella immaginaria è reattiva)

$$\boxed{Re[\bar{S}] = \frac{1}{2}\eta \cdot \frac{|Il|^2}{4\lambda^2 r^2} \sin^2\theta}$$

considero i soli campi lontani => calcolo $\frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^* = \frac{1}{2}\eta \frac{|Il|^2}{4\lambda^2 r^2}\sin^2\theta = Re[\bar{S}]$

cioè la potenza che viaggia radialmente (radiazione) è associata ai soli campi lontani

↳ campi lontani => campi di radiazione

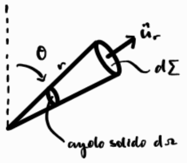
agli altri campi è associata energia immaginaria che non si propaga che rimane confinata nell'intorno della sorgente

- la radiazione $\propto \sin^2\theta$ => non viaggia in modo uniforme in tutte le direzioni

  ↳ la sorgente non è isotropa!

questo perchè ∄ la carica isolata pulsante cioè che oscilla tra +Q e −Q sinusoidalmente

la sorgente che abbiamo considerato noi, la densità di corrente, vuol dire che ci sono cariche + e − che si alternano agli estremi (corrente sinusoidale)



tubo di flusso
del campo EM

$$\bar{S}(\theta,r) = \eta_0 \frac{|Il|^2}{8\lambda^2 r^2}\sin^2\theta\,\hat{u}_r$$

$$dP = \bar{S}\cdot\underset{\underset{\hat{u}_r}{\shortparallel}}{\hat{u}_n} d\Sigma \Rightarrow dP = S\,d\Sigma$$

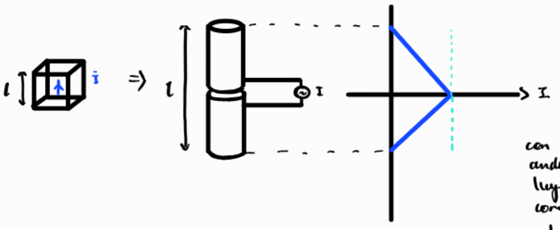
$$d\Sigma = r^2\underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{d\Omega} \Rightarrow dP = \eta_0\frac{|Il|^2}{8\lambda^2\cancel{r^2}}\sin^2\theta\cdot\cancel{r^2}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$ la potenza irradiata è <u>costante</u>!

ma la densità di potenza si riduce: $d\Sigma \propto r^2 \Rightarrow$ densità di pot. $\propto \frac{\overset{\text{cost.}}{\text{potenza}}}{\underset{\propto r^2}{\text{area}}} \propto \frac{1}{r^2}$

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\eta_0\frac{|Il|^2}{8\lambda^2}\sin^3\theta\, d\theta = 2\pi\eta_0\frac{|Il|^2}{8\lambda^2}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} \Rightarrow \underbrace{\boxed{P = \frac{\pi}{3}\eta_0|I|^2(l/\lambda)^2}}_{\text{potenza media in un periodo}}\ [W]$$ (è il flusso di $Re[\bar{S}]$)

questa potenza è fornita dal generatore che fa scorrere la corrente nel dipolo Hertziano

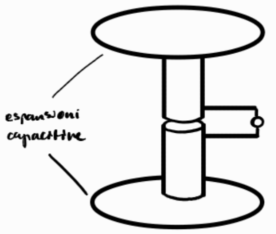
realizzazione fisica:

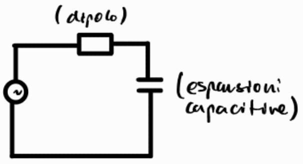


(dipolo corto)

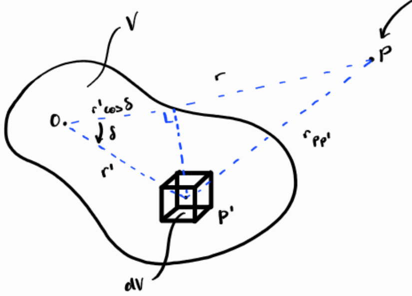
con questa configuraz. si osserva un andamento triangolare della corrente lungo il dipolo. Tuttavia io voglio una corrente <u>costante</u> lungo il dipolo.

↳ sfrutto la corrente di spostamento, chiudo il circuito senza collegamenti fisici





distribuzione volumetrica di densità di carica



siamo a <u>grande distanza</u> (Hp.)

contributo elementare (dipolo Hertziano)

$$\Rightarrow d\bar{A} = \frac{\bar{J}(P')dV}{4\pi r_{PQ}}e^{-j\beta r_{PP'}}$$

<u>Hp.</u> P lontano $\Rightarrow r_{PP'} \parallel r$; $r \gg r'$

$$r = r_{PP'} + r'\cos\delta \Rightarrow r_{PP'} = r - r'\cos\delta$$

$$\Rightarrow d\bar{A} = \frac{\bar{J}(P')dV}{4\pi r_{PP'}}\cdot e^{-j\beta r_{PP'}} \sim \frac{\bar{J}(P')dV}{4\pi r}e^{-j\beta(r-r'\cos\delta)} = \frac{\bar{J}(P')dV}{4\pi r}e^{-j\beta r}\cdot e^{+j\beta r'\cos\delta}$$

(al denom. $r_{PP'} \sim r$, però all'exp. $r'\cos\delta$ non è trascurabile se λ è piccolo. λ piccolo implica β grande)

$$\Rightarrow \bar{A}(P) = \int_V d\bar{A} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r}\cdot\underbrace{\int_V \bar{J}(P')e^{+j\beta r'\cos\delta}dV}_{\bar{N}(\theta,\varphi)}$$

$\bar{N}(\theta,\varphi)$: vettore di radiazione $\underbrace{[A\cdot m]}_{(I\cdot l)}$ ⇒ cioè è un <u>momento di dipolo equivalente</u>

$$\Rightarrow \boxed{\bar{A}(P) = \frac{\bar{N}(\theta,\varphi)\cdot e^{-j\beta r}}{4\pi r}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}(P) = \frac{\overset{\tilde{N}}{\bar{I}l}\, e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$

cioè se sono suff. lontano, posso sostituire il mio sistema ad un dipolo equivalente (con una grossa diff. da un dipolo reale, cioè che $\tilde{N}$ è funzione, in generale, di θ e φ, e quindi cambia in funzione della posizione di osservazione)

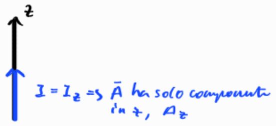
$\bar{A}(P) \Rightarrow \bar{H} = \nabla \times \bar{A}$ trovo tutti i contributi di campo

ma se mi interessa il solo campo magnetico di radiaz. $\Rightarrow$ $\underbrace{\bar{H} = J\beta(\bar{A} \times \hat{u}_r)}$

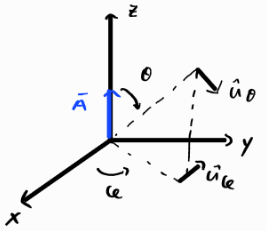
$H_\varphi = \frac{J\beta I l e^{-J\beta r}}{4\pi r} \cdot \sin\theta$ verifichiamo che questo si può ottenere da

$$\bar{A} = \frac{\bar{I}l e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$

$$A_z = \frac{Il e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$



$I = I_z \Rightarrow \bar{A}$ ha solo componente in z, A_z



$$\bar{A} \times \hat{u}_r = \begin{vmatrix} \hat{u}_r & \hat{u}_\theta & \hat{u}_\varphi \\ A_R & A_\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underset{0}{\cancel{A_\varphi \hat{u}_\theta}} - A_\theta \hat{u}_\varphi$$

$\hat{u}_\varphi \perp \bar{A} \Rightarrow A_\varphi \equiv 0$

$A_\theta = -A_z \sin\theta$

$\Rightarrow \bar{H} = J\beta(-A_\theta \hat{u}_\varphi) = J\beta \frac{Il e^{-J\beta r}}{4\pi r} \sin\theta\, \hat{u}_\varphi$ (= H_φ componente di campo lontano)

$$\bar{A} = \tilde{N}(\theta,\varphi) \cdot \frac{e^{-J\beta r}}{4\pi r}$$

$$\bar{H} = J\beta [A_\varphi(\theta,\varphi)\hat{u}_\theta - A_\theta(\theta,\varphi)\hat{u}_\varphi] = \frac{J\beta e^{-J\beta r}}{4\pi r} [N_\varphi(\theta,\varphi)\hat{u}_\theta - N_\theta(\theta,\varphi)\hat{u}_\varphi]$$

sappiamo che $\underbrace{\bar{E} \perp \bar{H} \perp \bar{S}, \text{ e } \frac{E}{H} = \eta}$ $\Rightarrow$ $\bar{E} = \eta(\bar{H} \times \hat{u}_r) = \frac{-J\omega\mu e^{-J\beta r}}{4\pi r} \underbrace{[N_\theta(\theta,\varphi)\hat{u}_\theta + N_\varphi(\theta,\varphi)\hat{u}_\varphi]}_{N_{tangente}}$

(vale nell'ipotesi che siamo per r grande, cioè campi lontani)

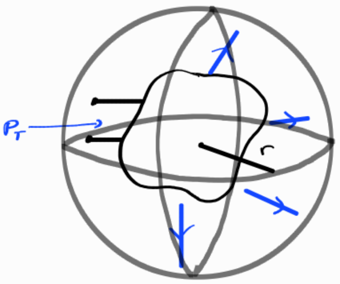
prop. onde TEM (sferica), TEM sferica nel senso che le sup. equifase sono sferiche, ma non l'ampiezza (infatti $\tilde{N}$ è funz. di θ, φ)

sorgenti (antenne) come trasduttori

- convertono l'energia EM dalla forma guidata alla forma radiata (e viceversa)
- sono dispositivi passivi: al più riemettono tutto ciò che ricevono
- reciproci: ricevono e trasmettono

antenna isotropa ($\not\exists$ nella realtà) $\Rightarrow$ ideale

(irraggia in modo uniforme in tutte le direz.)



$S_{iso}(r) = \frac{P_T}{4\pi r^2}$

$\int_{sfera} S_{iso} \cdot \hat{u}_r \, d\Sigma = P_T$

caso non isotropo

funzione di direttività $0 \le f \le 1$ descrive come si concentra la potenza lungo le direz.

$$\boxed{\bar{S}(\theta,\varphi,r) = \frac{P_T}{4\pi r^2} \cdot D \cdot f(\theta,\varphi)\,\hat{u}_r}$$

direttività (≥ 1)

direz. di max. radiaz.

$$S_{max} = \frac{P_T D}{4\pi r^2} \qquad (f(\theta,\varphi) = 1)$$

S_{iso}

$$\Rightarrow \frac{S_{max}}{S_{iso}} := D \geq 1$$

$$\int_\Sigma \bar{S}(\theta,\varphi,r)\cdot\hat{u}_r\, d\Sigma = \frac{P_T D}{4\pi}\int_\Sigma \frac{1}{r^2} f(\theta,\varphi)\, d\Sigma = \frac{\cancel{P_T} D}{4\pi}\int_\Omega f(\theta,\varphi)\, d\Omega = \cancel{P_T}$$

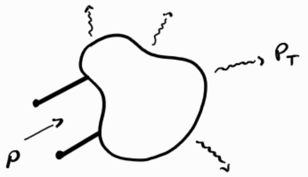
$d\Sigma = r^2 d\Omega$

(flusso di $\bar{S}$ mi da la potenza)

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{4\pi}{\int_\Omega f(\theta,\varphi)\, d\Omega}}$$

più è concentrato il fascio lungo una direz. più è grande la direttività

(tipo se ho f che è 1 lungo una direz. e 0 lungo le altre, l'integrale sarà piccolo e D sarà grande. Viceversa se f è costante spalmato su tutte le direz. integrando avrò un valore più grande e D più piccolo)



$P_T \le P$ ← potenza fornita

↑ potenza irradiata

$$\Rightarrow \boxed{P_T = \nu P} \qquad 0 \le \nu \le 1$$

↑ rendimento / efficienza

$$S(R,\theta,\varphi) = \frac{P_T \cdot D \cdot f(\theta,\varphi)}{4\pi R^2} = \frac{P \cdot \overbrace{\nu \cdot D}^{G} f(\theta,\varphi)}{4\pi R^2} = \frac{P \cdot G f(\theta,\varphi)}{4\pi R^2}$$

$\boxed{G := \nu \cdot D}$ guadagno dell'antenna

$G \geq \emptyset$

$G_{iso} = 10 \log \frac{G}{1}$ $[dB_I]$

↑ guadagno dell'antenna isotropa di riferimento $(D=1, \nu=1)$

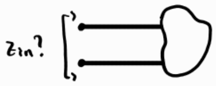
- è un guadagno legato ad una concentraz. di potenza (cioè mi concentra la potenza lungo una direz.) ma è un elemento passivo, non è una amplificaz. di potenza

sorgente isotropa: irraggia in modo uniforme

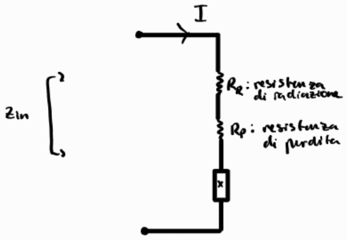
dipolo Hertziano: irraggia in modo $\underbrace{\text{omnidirezionale}}_{\text{uniforme lungo il piano azimutale}}$

modello circuitale

antenna trasmettente



servi per forza descritta da elementi passivi



R_R: la resistenza è l'unico componente in grado di dissipare potenza reale. È legata alla radiazione, non a dissipaz. per effetto Joule. Legata ai campi lontani (di radiazione)

muovo potenza e la irraggio ↓ (radiazione)

R_p: legata a perdite per dissipaz. per effetto Joule

X: componente reattiva legata all'accumulo di energia dovuta ai campi vicini

$\Rightarrow Z_{in} = R + JX$ Ω con $R = R_R + R_p$ antenne "risonanti" $\Rightarrow X = \emptyset$ ($Z_{in} = 50\Omega$ std. industriale, come $Z_c = 50\Omega$)

$$\nu = \frac{P_T}{P}$$

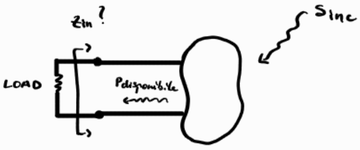
$$P_T = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R_R \;;\; P_p = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R_p \;\Rightarrow\; P = P_T + P_T \;\Rightarrow\; \nu = \frac{\cancel{\frac{1}{2}|I|^2} \cdot R_R}{\cancel{\frac{1}{2}|I|^2} \cdot R_R + \cancel{\frac{1}{2}|I|^2} \cdot R_p} \;\Rightarrow\; \boxed{\nu = \frac{R_R}{R_R + R_p}}$$

- l'espressione di ν ci indica che le antenne non seguono la legge di Moore
- se provo a miniaturizzare le antenne, trovo che per dim. antenna $<< \lambda$ ⟶ $R_R \downarrow\downarrow\downarrow$, $R_p \downarrow$ $\Rightarrow \nu \longrightarrow \emptyset$

per dim. $\sim 0{,}1\lambda$ già sono al limite. Per dim. ancora inferiori praticamente non irraggio

polarizzazione caratteristica: l'onda che trasmetto deve essere polarizzata in modo t.c. è compatibile con l'antenna ricevente

antenna ricevente



- si può dim. che R_P, R_R, X sono uguali

- dal pt. di vista del carico, vedo un $\underbrace{\text{generatore}}$

  non è che l'antenna fornisce potenza, la potenza è data dall'onda incidente (S_{inc})

- la direzione privilegiata per la trasmissione lo è anche per la ricezione

$$P_d \propto S_{inc}$$

area efficace dell'antenna ricevente

$$\hookrightarrow \underbrace{P_d}_{[W]} = \underbrace{S_{inc}}_{[W/m^2]} \cdot \underbrace{A_e}_{[m^2]} \cdot \underbrace{f(\theta,\varphi)}$$

è uguale in trasmissione che in ricezione (per la stessa antenna)

- A_e non è collegata all'area geometrica dell'antenna

$$\boxed{\frac{G}{A_e} = \frac{4\pi}{\lambda^2}}$$ vale sempre

$$\boxed{P_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_0/2|^2}{R} = \frac{|V_0|^2}{8R}}$$

$P_d \propto |E|^2, |V|^2$
$P_d \propto f(\theta,\varphi)$ $\Rightarrow$ $|V| \propto \sqrt{f(\theta,\varphi)}$

$$\underbrace{V_0}_{[V]} = \underbrace{E_{inc}}_{[V/m]} \cdot \underbrace{l_e}_{[m]} \cdot \sqrt{f(\theta,\varphi)}$$

l_e: lunghezza efficace dell'antenna (anche in questo caso non è legata alla lunghezza fisica)

- siamo nel dominio dei fasori => l può essere anche immaginaria (A_e no, è legata a P_d che è una potenza reale)

  $\hookrightarrow$ ci può essere uno sfasamento/ritardo della tensione vista ai capi rispetto al campo incidente

$$P_d = S_{inc} \cdot A_e \cdot f(\theta,\varphi) = \frac{|V_0|^2}{8R} = \frac{|E_{inc}|^2 \cdot |l_e|^2 \cdot f(\theta,\varphi)}{8R}$$

$$S_{inc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_{inc}|^2}{\eta_0} \qquad V_0 = E_{inc} \cdot l_e \cdot \sqrt{f(\theta,\varphi)}$$

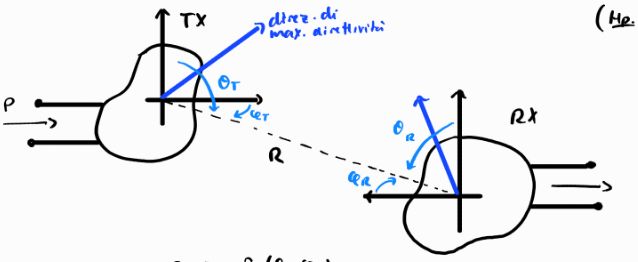
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{|E_{inc}|^2}}{\eta_0} \cdot A_e \cdot \cancel{f(\theta,\varphi)} = \frac{\cancel{|E_{inc}|^2} \cdot |l_e|^2 \cdot \cancel{f(\theta,\varphi)}}{8R}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_e = \frac{\eta_0 \cdot |l_e|^2}{4R}}$$ vale sempre

(tutto ciò sotto l'ipotesi che ci sia adattamento tra onda incidente e trasmettente)

equazione di Friis

(Hp. adattamento di polarizzaz.)



(TX e RX antenne generiche, anche di tipo diverso)

$$\begin{cases} S_{inc} = \dfrac{P \cdot G_T \cdot f_T(\theta_T,\varphi_T)}{4\pi R^2} \\ P_R = S_{inc} \cdot A_e \cdot f_R(\theta_R,\varphi_R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_R = P \cdot G_T \cdot f_T(\theta_T,\varphi_T) \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2 \cdot G_R \cdot f_R(\theta_R,\varphi_R)}$$

eq. di Friis (link budget)

mi dice quanta potenza ricevo in funz. dei parametri delle antenne

- se le antenne sono ben puntate => $f_R = f_T = 1$

$$P_R = \underset{\substack{[W] \\ \uparrow \\ \underline{EIRP}}}{\underbrace{P \cdot \overset{\text{legata a TX}}{G_T}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2}_{\text{attenuaz. di spazio libero}} \cdot \overset{\text{legata a RX}}{G_R}$$

Equivalent Isotropically Radiated Power

è una potenza equivalente: potenza che una antenna trasmettente isotropica dovrebbe emettere per avere P_R ricevuta

dipolo Hertziano

$$S = \eta_0 \cdot \frac{|Il|^2}{8\lambda^2 R^2} \sin^2\theta \quad ; \quad P = \frac{\pi}{3}\eta_0 \frac{|Il|^2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S} = \frac{\pi/3}{\pi/3} \cdot \eta_0 \cdot \frac{|Il|^2}{8\lambda^2 R^2} \cdot \sin^2\theta$$

$$= \frac{P}{4\pi R^2} \cdot \underbrace{\frac{3}{2}}_{G} \cdot \underbrace{\sin^2\theta}_{f(\theta,\varphi)} \qquad (D = G,\ \nu = 1)$$

infatti

$$\Rightarrow D = \boxed{G} = \frac{4\pi}{\int_\Omega f(\theta,\varphi)\, d\Omega} \overset{}{\underset{d\Omega = \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta}{\uparrow =}} \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta} = \frac{2}{\underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{4/3}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{A_e}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \Rightarrow \boxed{A_e} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$ non compare l per il dipolo Hertziano

<u>Hp.</u> $R_p = 0$

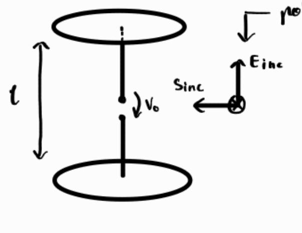
$$P = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R_R = \frac{\pi}{3}\eta_0 \cdot \frac{|Il|^2}{\lambda^2} \Rightarrow \overset{\substack{\text{legata alla radiaz.} \\ \downarrow}}{\boxed{R_R}} = \frac{2}{3}\pi\eta_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad \propto l^2$$ (lunghezza fisica)

R_p invece, che è legata a dissipaz. Joule, cioè è proprio una resistenza fisica, è $\propto l$

per questo $R_R \to 0$ più velocemente di R_p per $l \to 0$, e quindi $\nu \to 0$ per $l \to 0$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{3\lambda^2}{8\pi}}}{A_e} = \frac{|l_e|^2 \cdot \eta_0}{\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{2}{3}\pi\eta_0 (l/\lambda)^2}}{4R_R}}$$ (vale sempre)

$$\Rightarrow |l_e| = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{8\pi} \cdot \frac{1}{\eta_0} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}\pi\eta_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2} \Rightarrow \boxed{|l_e|} = l$$ è l'unico caso in cui $l_e = l$

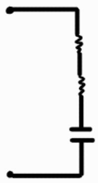


polarizzaz. adeguata per esser captata bene dall'antenna

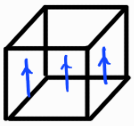
$V_0 = E_{inc} \cdot l$ (relaz. valida per il condensatore)

ma so anche che $\boxed{V_0 = E_{inc} \cdot l_e}$

perciò vale $\underline{l = l_e}$

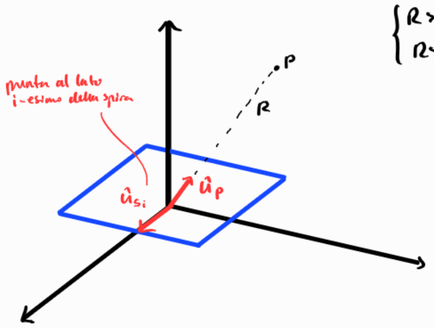


← l'elemento reattivo in questo caso è capacitivo consideriamo la seguente sorgente:



$\bar{M}$ ← densità di corrente magnetica (∄ nella realtà, ∄ la carica isolata magnetica)

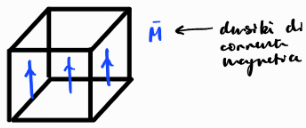
dimostreremo però che è equivalente alla radiaz. di una piccola spira (quadrata)



$$\begin{cases} R \gg a \\ R \gg \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{considero campi lontani / di radiaz.}$$

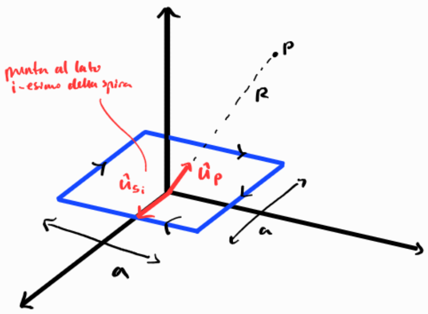
$$\bar{A}(P) = N(\theta,\varphi) \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi R} \qquad N(\theta,\varphi) = \int_V \bar{J}(P') e^{j\beta r' \cos\delta} \cdot dV$$

considerano la seguente sorgente:



(∄ nella realtà, ∄ la carica isolata magnetica)

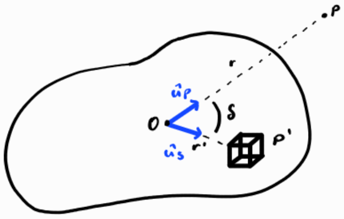
dimostreremo però che è equivalente alla radiaz. di una piccola spira (quadrata)



$$\bar{A}(P) = \bar{N}(\theta,\varphi)\cdot\frac{e^{-J\beta r}}{4\pi R} \qquad \bar{N}(\theta,\varphi) = \int_V \bar{J}(P')e^{J\beta r'\cos\delta}\cdot dV$$

↑ abbiamo una spira, non un volume

$$\Rightarrow \bar{N}(\theta,\varphi) = \int_{spira} \bar{I}(P')e^{J\beta r'\hat{u}_P\cdot\hat{u}_s}\,d\ell = \sum_{i=1}^{4}\bar{I}_i\cdot e^{J\beta\frac{a}{2}\hat{u}_P\cdot\hat{u}_{s_i}}\cdot a$$



se $a \ll \lambda$ (spira/sorgente piccola)

$$e^{J\overset{\frac{2\pi}{\lambda}}{\beta}\frac{a}{2}\hat{u}_P\cdot\hat{u}_{s_i}} \sim 1 + J\beta\frac{a}{2}\hat{u}_P\cdot\hat{u}_{s_i} \qquad (e^x \sim 1+x \text{ per } x \text{ piccolo})$$

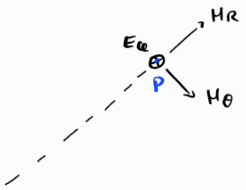
$$\Rightarrow \bar{N}(\theta,\varphi) \sim \sum_{i=1}^{4}\bar{I}_i\cdot a\left(1+J\beta\frac{a}{2}\hat{u}_P\cdot\hat{u}_{s_i}\right)$$

$$\hat{u}_P = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{u}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{u}_y + \cos\theta\,\hat{u}_z$$

lato	$\bar{I}_\ell$	$\hat{u}_{s_i}$	$\hat{u}_P\cdot\hat{u}_{s_i}$
1	$I\hat{u}_y$	$\hat{u}_x$	$\sin\theta\cos\varphi$
2	$-I\hat{u}_x$	$\hat{u}_y$	$\sin\theta\sin\varphi$
3	$-I\hat{u}_y$	$-\hat{u}_x$	$-\sin\theta\cos\varphi$
4	$I\hat{u}_x$	$-\hat{u}_y$	$-\sin\theta\sin\varphi$

$$\Rightarrow \bar{N} = J\beta a^2\cdot I\sin\theta\,\overbrace{(-\sin\varphi\,\hat{u}_x + \cos\varphi\,\hat{u}_y)}^{\hat{u}_\varphi}$$

$$\Rightarrow \bar{N} = Jba^2\,I\sin\theta\,\hat{u}_\varphi$$



da $\bar{A}(P)$:

$$\begin{cases} H_R = \dfrac{J\omega\mu I\cdot S}{2\pi\eta_0}\cdot\left(\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{J}{\beta R^3}\right)\cos\theta\, e^{-J\beta R} \\ H_\theta = \dfrac{J\omega\mu I\cdot S}{4\pi\eta_0}\cdot\left(\dfrac{J\beta}{R}+\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{\beta R^3}\right)\sin\theta\cdot e^{-J\beta R} \\ E_\varphi = -\dfrac{J\omega\mu IS}{4\pi}\left(\dfrac{J\beta}{R}+\dfrac{1}{R^2}\right)\sin\theta\, e^{-J\beta R} \end{cases}$$

- è duale al dipolo Hertziano, ma con campi H e E scambiati
- sono gli stessi campi che avrei se avessi una sorgente con densità di corrente magnetica

  ↳ sorgente equivalente ad un dipolo magnetico per $R \to 0$

dominano H_R, H_θ => campo quasi-magnetostatico è equivalente al campo statico di una spira

per $R \to \infty$

$$\begin{cases} H_\theta, E_\varphi \Rightarrow H \perp E \perp \hat{u}_R \\ \dfrac{H_\varphi}{H_\theta} = \eta_0 \\ \text{calc. } \bar{S} \text{ e trovo che è associata ai solo campi lontani} \end{cases}$$

=> onda TEM sferica

campi di radiaz.:

$$\begin{cases} H_\theta = \dfrac{J\omega\mu I \cdot s(J\beta)}{4\pi\eta_0 R} \cdot \sin\vartheta\, e^{-J\beta R} \\ E_\varphi = -\dfrac{J\omega\mu I s(J\beta)}{4\pi R} \cdot \sin\vartheta\, e^{-J\beta R} \end{cases}$$

=> è scambiata la polarizzaz. rispetto al dipolo Hertziano

$E_\varphi, H_\theta \propto \sin\theta$

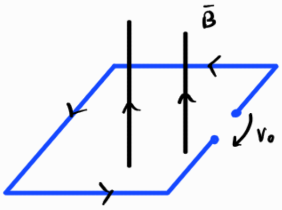
$S(\theta,\varphi,R) \propto \sin^2\vartheta$

$f(\theta,\varphi) = \sin^2\vartheta$

$$D = \frac{4\pi}{\int_\Omega f(\theta,\varphi)\,d\Omega} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{D}{A_e} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \Rightarrow A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

$(=G)$



(adattamento di polarizzazione)

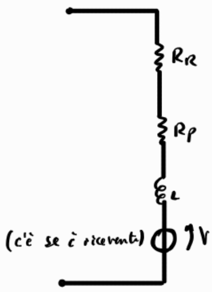
uso la spira in ricezione

$$\begin{cases} |V_0| = |J\omega B \cdot \underset{\uparrow \text{area spira}}{s}| = |J\omega\mu_0 s H| = \left|\dfrac{J\omega\mu_0 s}{\eta_0} E\right| \\ V_0 = E_{inc} \cdot l_e \end{cases}$$

$$\Rightarrow l_e = \frac{J\omega\mu_0 S}{\eta_0} = J\beta s$$

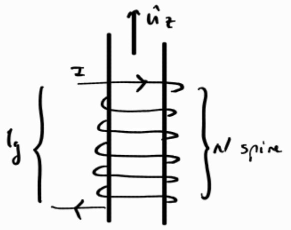
$$R_R = \frac{|l_e|^2\eta_0}{4A_e} = \frac{\beta^2 s^2 \eta_0}{4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda^2}{\pi}} = \frac{8}{3}\pi^3\eta_0\left(\frac{s}{\lambda^2}\right)^2$$

(Hp. $R_P = 0$) ?



L = ? => manca il raggio del filo => uso più spire

L,

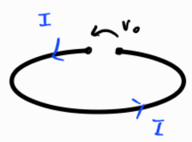


$\bar{N} = \frac{N}{l_g} \cdot I \cdot \hat{u}_z$

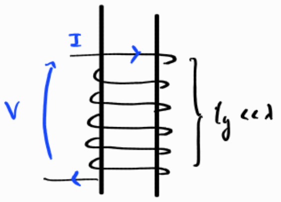
$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$

$$L = \frac{\phi(B)}{I} = \frac{BNs}{I} = \frac{\mu_0 I \cdot N^2}{l_g \cdot I} = \frac{\mu N^2 s}{l_g}$$

non dipende dal diametro del conduttore



$E^\circ, S^\circ, R_{R_0}, D_0, f_0(\theta,\varphi), l_{e_0}$



E, R, D, f, l_e

(stiamo sempre considerando sorgenti elementari piccole)

* $E = N E_0$

* $S_0 = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{\eta_0} \Rightarrow$
  $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{|E|^2}{\eta_0} = \frac{1}{2}\frac{N^2|E_0|^2}{\eta_0} = N^2 S_0$

* $P_0 = \int S_0 \, d\Sigma$
  $P = \int S \, d\Sigma = N^2 \int S_0 \, d\Sigma = N^2 P_0$

* $P_0 = \frac{1}{2}|I|^2 R_{R_0}$
  $P = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{|I|^2} R_R = \underbrace{N^2 \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{|I|^2} \cdot R_{R_0}}_{N^2 P_0} \Rightarrow R_R = N^2 R_{R_0}$

la resistenza ohmica (fisica) invece è $\propto N$

↳ per N crescente $\Rightarrow R_R$ prevale su R_p e quindi cresce l'efficienza (perciò si usano più spire)

* $f(\theta,\varphi) = \sin^2\theta$
  $D = \frac{3}{2}$
  $A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$

(invariate

$P_R = A_e \cdot S_{inc}$ ⇒ potenza ricevuta è invariata !!

↳ invariata

$\underbrace{V = N V_0}$ ⇒ $l_e = N l_0 = N(JBS)$

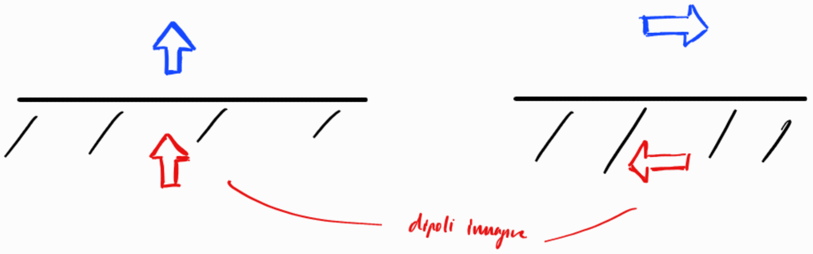
(ho N gen in serie)

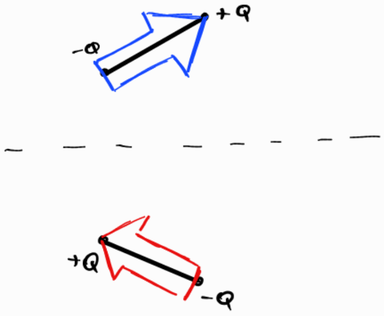
$\Rightarrow P_{disponibile} = \frac{|V|^2}{8R_R} = \frac{N^2|V_0|^2}{8N^2 R_{R_0}} = P_0$

potenza disponibile non è cambiata nonostante $V \gg V_0$ (perché A_e invariata)

non importa in generale la potenza che rendo disponibile, di solito ho un amplificatore a valle

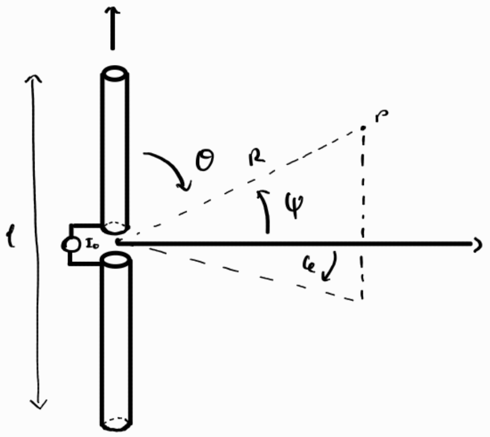
dipoli Hertziani e condizioni





poi si sommano
le radiaz.

antenne filiformi



conduttore ideale

↳ ho una densità sup. di corrente $\bar{J}_s$, e un campo elettrico interno nullo

se conoscessi $\bar{J}_z$ (o $\bar{I}_z$) sarei in grado di calc. la radiaz.

=> nota $\bar{I}(z) \longrightarrow \bar{N}(\theta,\varphi) \longrightarrow \bar{E}, \bar{H}$

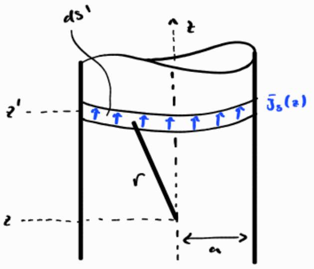
=> dobbiamo calc. $\bar{I}$

considero l'asse z interna al conduttore:

$$E(z) = \phi = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla(\nabla\cdot\bar{A}) - j\omega\mu\bar{A}$$

inoltre essendo $\bar{I}(z) = \bar{J}_z(z) \Rightarrow \exists$ la sola componente $\bar{A}_z$ ($\bar{A}$ è diretto come $\bar{I}$)

$$\Rightarrow \frac{d^2 A_z}{dz^2} + \beta^2 A_z = \phi \Rightarrow A_z(z) = M e^{-j\beta z} + N e^{j\beta z}$$

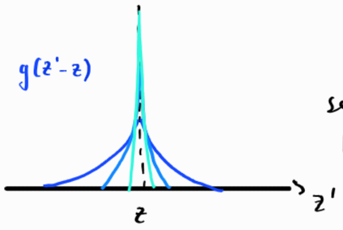


$$A_z(z) = \int_{filo} J_z(z') \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \cdot ds' = \int_{filo} I(z') \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \cdot dz'$$

con $r = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$

$$\Rightarrow A(z) = \int_{-l/2}^{l/2} \underbrace{I(z')}_{f(z')} \cdot \underbrace{\frac{e^{-j\beta\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2+a^2}}}_{g(z-z') = g(-(z'-z)) = g(z'-z)} \cdot dz'$$

(ricorda una convoluz. per una δ)



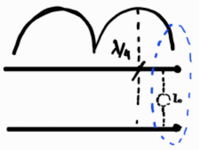
se a<<l (fili sottili, a<<z-z')
↳ ~ δ di Dirac

$$\Rightarrow A_z(z) = k\, I_z(z)$$

cioè se: fili sono molto sottili contano i contributi solo a pari quota z e quelli a z' sono "lontani" e quindi trascurabili

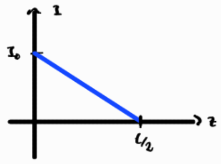
=> $I(z) = M' e^{-j\beta z} + N' e^{+j\beta z}$ cioè è la stessa corrente che si trovava nelle linee di trasmissione!

condiz. al contorno $\begin{cases} I(0) = I_0 \\ I(\pm\frac{l}{2}) = 0 \end{cases}$

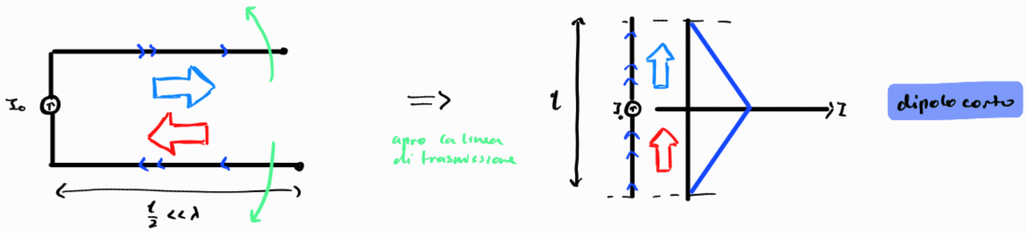


considerando filo corto
↳ sin x ~ x

=>



considero la linea di trasmissione equivalente:



- nella linea di trasmissione i contributi dei dipoli si compensano => <u>non irradia</u>
- nel dipolo corto i contributi si sommano => <u>irradia</u>

guardando dai morsetti del generatore vedo:

- jx impedenza puramente reattiva (capacitiva) nel caso della linea di trasm.
- $R_R + jX$ per il dipolo corto
  (jx di solito elevata e difficile da adattare con una rete adattante a valle, avrò un guadagno di −10dB nella realtà)

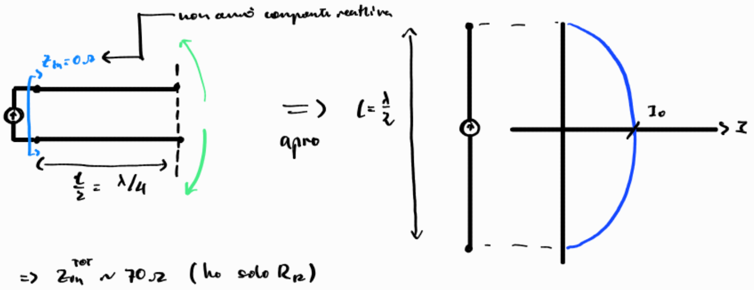
dipolo corto

- $f(\theta) = \sin^2\theta$
- $D = \frac{3}{2}$ (1,73dB$_I$)
- $A_e = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$

però a differenza del dipolo Hertziano, non ho corrente uniforme => a parità di corrente irradio meno

└> R_R minore ($P_{irradiata} = \frac{1}{2}|I|^2 \cdot R_R$) => $R_R = \frac{\pi}{6}\eta_0 (l/\lambda)^2$

dipolo risonante $\frac{\lambda}{2}$



=> $Z_{in}^{TOT} \sim 70\Omega$ (ho solo R_R)

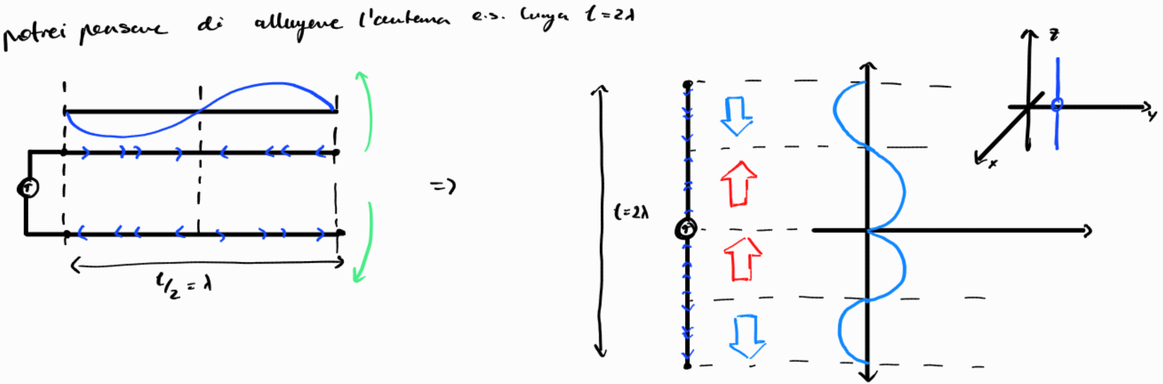
R_R elevata!

però $f(\theta) = \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\varphi)}{\cos\varphi}\right]^2$ è molto simile a $\sin^2\theta$

$D = 1,64$ (2,1 dB$_I$) irradiamo ancora in modo poco direzionale

come aumento la direttività?

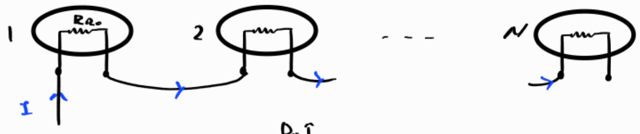
potrei pensare di allungare l'antenna e.s. lunga $l = 2\lambda$



- sul piano xy non irradia
  (i dipoli si compensano)

  ↳ non è una buona idea come soluzione...

schiera (gruppo) di antenne



singolo elemento:

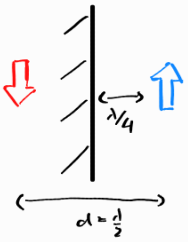
$S_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_0|^2}{\eta_0}$; $P_0 = \frac{1}{2} |I|^2 \cdot R_{R0}$

$\boxed{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E|^2}{\eta_0} = \frac{1}{2} \frac{|E_0|}{\eta_0} \cdot N^2 = N^2 \cdot S_0$ ($E = NE_0$, sovrapp. eff.)

$\boxed{R_R} = N R_{R0}$ (sono in serie) $\Rightarrow \boxed{P} = NP_0$

$S = \frac{PD}{4\pi R^2} = \frac{NP_0 D}{4\pi R^2} = N^2 S_0 = \frac{N^2 P_0 D_0}{4\pi R^2} \Rightarrow \frac{N^2 P_0 D_0}{4\pi R^2} = \frac{NP_0 D}{4\pi R^2} \Rightarrow \boxed{D} = ND_0$ aumenta la direttività!

riflettore:

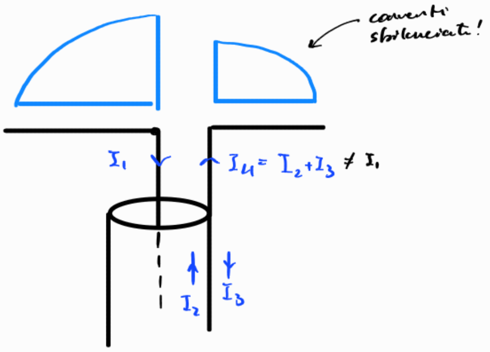


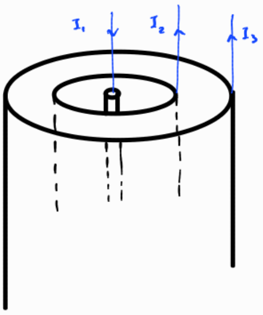
$\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d}_{\text{sfasamento}} = \pi \Rightarrow d = \frac{\pi}{2}$

così i dipoli (di verso opposto) si sommano in anti fase e quindi nel complesso in fase

↳ aumento guadagno (direttività)

realizzazione fisica





$I_1 = I_2$

ma $I_3 = ?$

a cosa è dovuta questa cosa?

coassiale: 3 conduttori a radiofrequenza!

$\Rightarrow$ BAL - UN (balanced to unbalanced)

↳ $I_4 = I_1$ bilancia il dipolo

un esempio è un trasformatore 1:1