eq. di Maxwell delle onde

$\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \nabla^2 E$ => in una dim => $\boxed{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}$

una soluz. unidim. è:

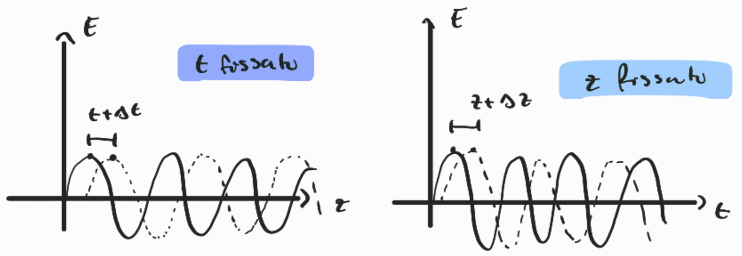
$\boxed{E = E_0 e^{i(kz - \omega t)}}$ dove $\begin{cases} k: \text{vettore/numero d'onda}, & \boxed{k = 2\pi/\lambda} \\ \omega: \text{freq. angolare}, & \boxed{\omega = 2\pi\nu} \end{cases}$

$= E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t}$

fase

$Re[E] = E_0 \cos(kz - \omega t)$ (la parte Im[] non ci interessa, E è un campo reale)

è un'onda viaggiante



(faccio una fotografia ad un ist. di tempo t fissato, e vedo com'è nello spazio in quell'istante l'onda)

(mi metto in un punto fisso z_0 e vedo come si evolve nel tempo l'onda)

$k(z+\Delta z) - \omega(t+\Delta t) = kz - \omega t$ pongo che la fase sia uguale

nella pos. $z+\Delta z$ all'istante $t+\Delta t$ — nella pos. z all'istante t

$\cancel{kz} + k\Delta z - \cancel{\omega t} - \omega\Delta t = \cancel{kz} - \cancel{\omega t}$

=> $k\Delta z = \omega \Delta t$ => $\Delta z = \omega/k \, \Delta t$ legge oraria del fronte d'onda

$\boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$ velocità di fase

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = c \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

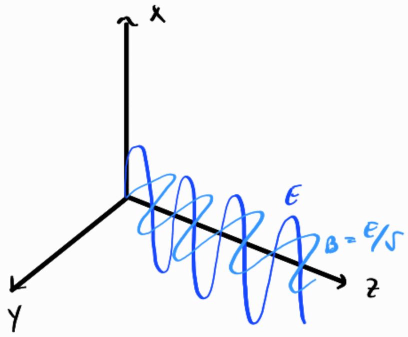
=> $\boxed{v = c/n}$ più è grande n più è denso otticamente

$(v_f =)\ v = \frac{\omega}{k} = \frac{\cancel{2\pi}\nu}{\cancel{2\pi}/\lambda} = \nu\lambda = c/n$ (nel vuoto diventa $\nu\lambda_0 = c$)

$\begin{cases} \omega = 2\pi\nu \\ k = 2\pi/\lambda \end{cases}$

- passando dal vuoto ad un mezzo è la lunghezza d'onda λ che cambia, NON la freq. ν

↳ $\lambda = \lambda_0/n$: l'onda cambia perché cambia la lunghezza d'onda



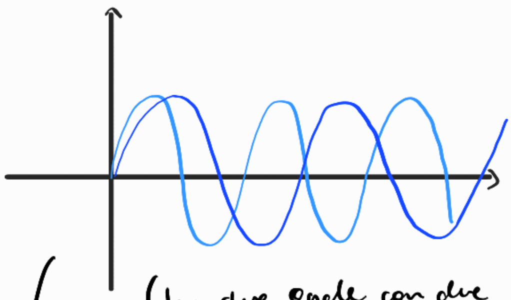
$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0^2 v$ $[J/s\,cm^2]$ densità di energia che si muove con una certa velocità

n_{ph} densità di fotoni (visione crepuscolare dell'onda)

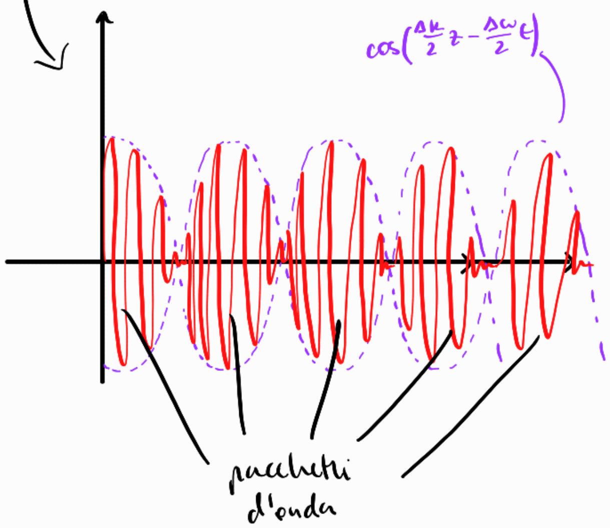
energia del fotone: $h\nu$

• ∄ nella natura un'onda così "bella", continua, monocromatica, da $+\infty$ a $-\infty$ ⇒ "continuous wave" (cw)

pacchetto d'onde



(ho due onde con due (leggermente diverse) lunghezze d'onda)



$$E(z,t) = E_0 e^{i(kz-\omega t)} + E_0 e^{i[(k+\Delta k)z-(\omega+\Delta\omega)t]}$$

$$= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \left\{ 1 + e^{i(\Delta k z - \Delta\omega t)} \right\}$$

$$= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)} \cdot \left\{ \frac{1}{e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}} + e^{i(\Delta k z - \Delta\omega t)} \right\}$$

$$= E_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{e^{-i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)} + e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}}{2} \right\}}_{\text{coseno}} \cdot 2$$

$$= E_0 \underbrace{e^{i(kz-\omega t)} \cdot e^{i\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}}_{e^{i\left[\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)z - \left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]} \ \text{HF}} \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \ \text{LF}$$

$\Downarrow$

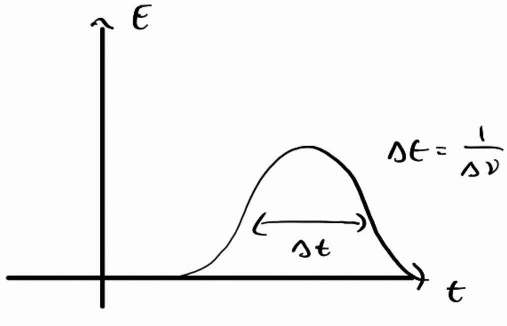
$|E|^2$

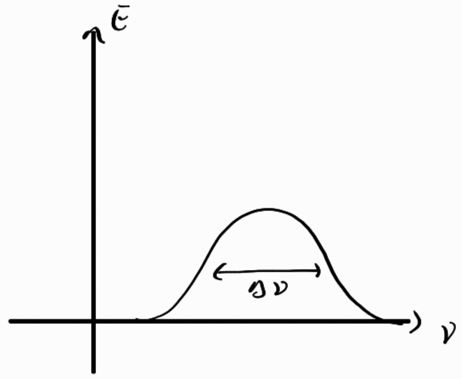
$\Downarrow$

$$I = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \Rightarrow$$

la somma di due onde con lunghezze d'onda poco diverse mi dà un'onda con lunghezza d'onda molto più lunga

↳ $\lambda_{nuovo} = 2\pi/\underset{\text{piccolo}}{\Delta k}$





più breve voglio l'impulso più componenti devo avere in freq.

per $\Delta\nu \to \infty$ ottengo un impulso che è una delta di Dirac $\delta(t)$ nei tempi.

viceversa se ho una sola componente/armonica in freq. nei tempi ho una cost.

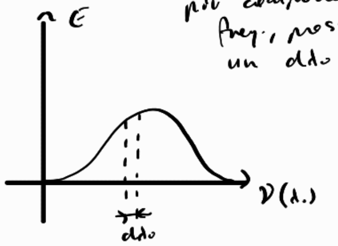
↳ continuous wave

il pacchetto d'onda poi a sua volta si muove

$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ velocità di gruppo $\Rightarrow$ $\frac{d\omega}{dk}$ derivata della relaz. di dispersione

è la velocità con cui si muovono i pacchetti, che è la velocità di propagaz. del $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$ che li modula

In un pacchetto ho più componenti in freq., posso def. un $d\lambda_0$

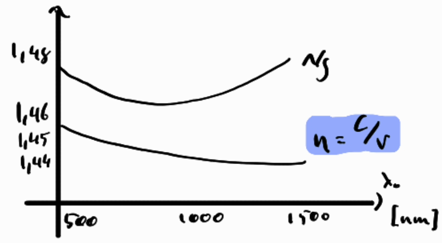


nel vuoto: $v_g = c = \frac{d\omega}{dk}$

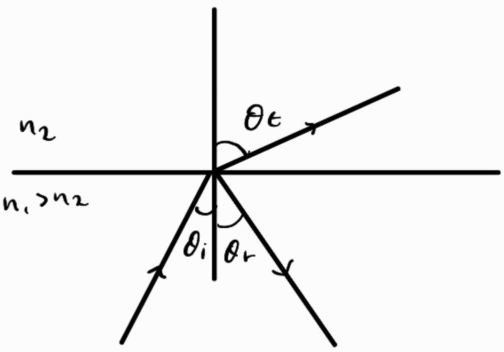
$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\cancel{2\pi}\, d\nu}{\cancel{2\pi}\, d\frac{n}{\lambda_0}} = \frac{d\nu}{\frac{1}{\lambda_0}dn - n\cdot\frac{1}{\lambda_0^2}d\lambda_0} = \frac{d\nu}{-\frac{d\lambda_0}{\lambda_0^2}\left(-\frac{dn\cdot\lambda_0}{d\lambda_0} + n\right)} = \frac{d\nu}{\underbrace{\frac{-d\lambda_0}{\lambda_0^2}}_{d\frac{1}{\lambda_0}}\left(n - \lambda_0\frac{dn}{d\lambda_0}\right)} = \underbrace{\frac{d\nu}{d\frac{1}{\lambda_0}}}_{c}\cdot\frac{1}{N_g} = \frac{c}{N_g}$$

$$\begin{cases} \omega = 2\pi\nu \\ k = 2\pi/\lambda = 2\pi\, n/\lambda_0 \end{cases} \qquad \lambda = \lambda_0/n$$

$N_g = n - \lambda_0 \cdot \frac{dn}{d\lambda_0}$ se n non dipende da λ_0 $N_g = n$



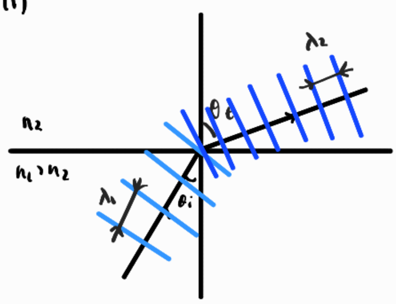
legge di Snell



(I) $\theta_i = \theta_r$

(II) $\frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_i)} = \frac{n_1}{n_2}$

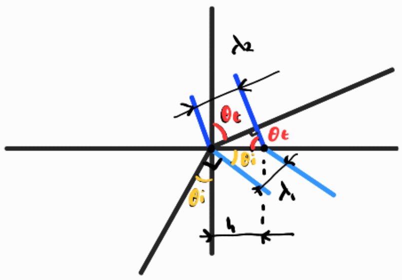
dim (II)



$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} = \frac{c/n_1}{\nu}$

$\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu} = \frac{c/n_2}{\nu}$

⇓



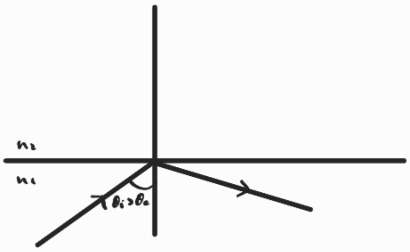
$$\begin{cases} \sin\theta_t = \frac{\lambda_2}{h} \\ \sin\theta_i = \frac{\lambda_1}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{\lambda_2}{\sin\theta_t} \\ h = \frac{\lambda_1}{\sin\theta_i} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\sin\theta_t} = \frac{\lambda_1}{\sin\theta_i} \xRightarrow{\lambda = \frac{c/n}{\nu}} \frac{\cancel{c}}{n_2\sin\theta_t} = \frac{\cancel{c}}{n_1\sin\theta_i}$$

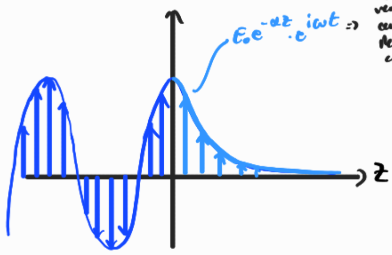
$$\hookrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}$$

se $\theta_t = 90°$ ⇒ riflessione totale interna (TIR) ⇒ $\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} < 1$ $(n_1 > n_2)$

angolo critico

tuttavia, ci sono anche effetti del second'ordine



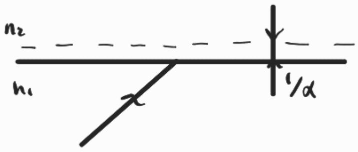


⇒ man mano che l'onda si sposta verso destra, l'ampiezza dell'esponenziale cambia di conseguenza. Perciò compare un termine con la pulsaz.

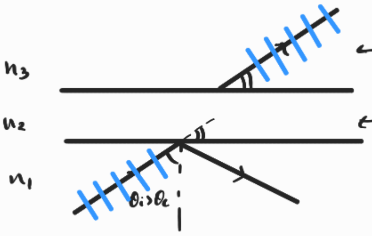
$$\alpha = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot \sin^2\theta_i - 1}$$

⇒ tunneling ottico

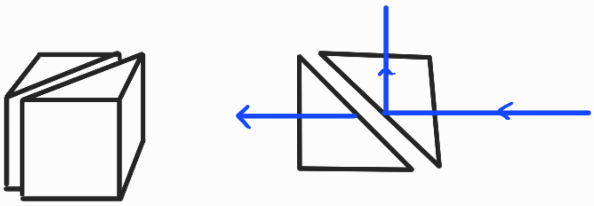
effetto di Goos - Hänchen



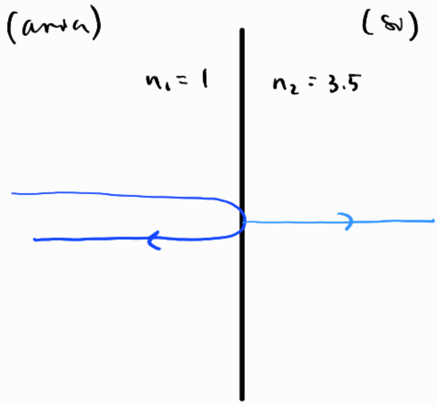
• è come se l'onda andasse a incidere su una sup. $1/\alpha$ più in là di quella reale



beam splitter



strato anti riflesso

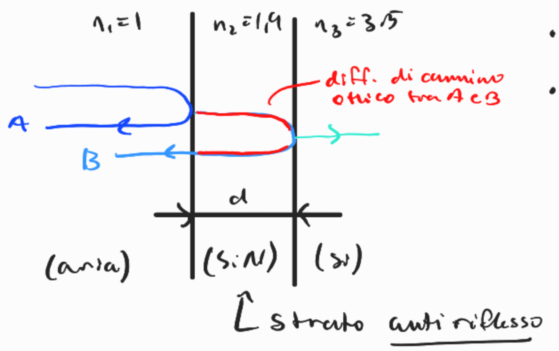


- voglio minimizzare la componente riflessa

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \sim 0{,}3$$ cioè il 30% della luce viene riflessa

R → riflettanza: qt. di intensità di luce che viene riflessa all'interfaccia

- come ridurre ulteriormente la comp. riflessa?
  - ↳ aggiungo un II° strato



- qual'è lo sfasamento tra i due fasci riflessi?
- a fronte di una riflessione esterna ho uno sfasamento di 180°
  - ↑ provengo da un mezzo otticamente meno denso e incido su un mezzo più denso
- (considero incidenza ⊥ sennò dovrei usare i coeff. di Fresnell)

A ⇒ $\phi_A = 180°$ (riflessione esterna) infatti $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} < 0$ il campo cambia segno

r → è analogo a R solo che è riferito al campo elettrico non all'intensità

B ⇒ $\phi_B = 180° + \underbrace{2dk}_{\text{sfasamento dovuto alla diff. di cammino ottico } (= \text{diff. cammino} \cdot k)} = 180° + 2d \cdot \frac{2\pi}{\lambda / n_2}$

voglio avere $2dk = 180°$ per avere $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = 180° + 180° - 180° = 180°$ così da avere che A e B si sommano controfase

$$\Rightarrow 2d \cdot \frac{2\pi \cdot n_2}{\lambda} = m\pi \quad , m \in \mathbb{N}$$

↳ $\boxed{d = m \frac{\lambda}{4 n_2}}$ con $m \in \mathbb{N}$ condiz. di antifase

(tendenzialmente ho un pacchetto d'onde quindi più λ)

⇓

$(m = 1, \lambda = 600\,nm)$

⇓

$d \sim 80\,nm$

• tuttavia A e B hanno ampiezze diverse quindi nonostante si sommino in controfase non è detto che si annullino

⇒ voglio A e B con ampiezza simile per avere una cancellaz. max.

↳ un val. adeguato è: $\boxed{n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}}$ (condiz. sull'ampiezza)

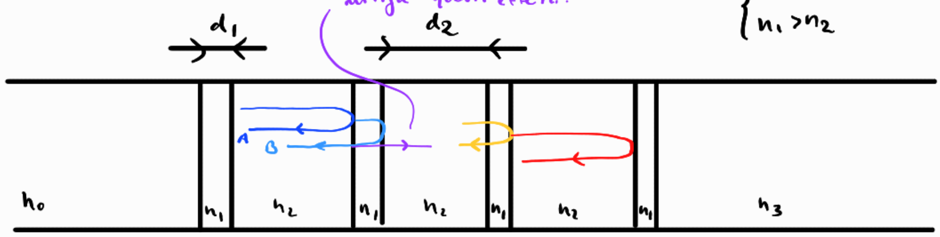
$\sim 1{,}9$

distributed Bragg reflector (DBR)

eff. del second'ordine, che a sua volta da vita a eff. del second'ordine e così via. Avere più strati mitiga questi effetti.

$\begin{cases} d_1 < d_2 \\ n_1 > n_2 \end{cases}$

• voglio minimizzare la luce che arriva a n_3 da n_0



$\begin{cases} d_1 = \dfrac{\lambda}{4n_1} \\ d_2 = \dfrac{\lambda}{4n_2} \end{cases}$ ⇒ A $\phi_A = 180°$ ← riflessione esterna

⇒ B $\phi_B = 0° + 2dK$ $\quad \pi = 180°$ $\Big\}$ ⇒ sono in fase ⇒ è uno specchio

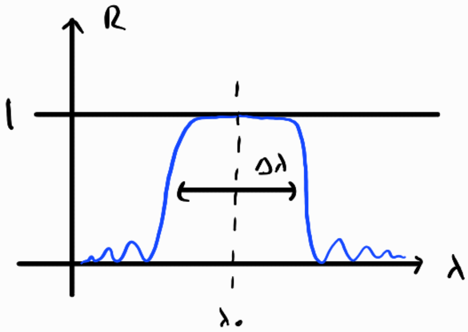
$d = \frac{\lambda}{4n_1}$, $K = \frac{2\pi}{\lambda/n_1}$

riflessione interna

n° di strati

$$\boxed{R_N = \left(\frac{n_1^{2N} - \frac{n_0}{n_3} n_2^{2N}}{n_1^{2N} + \frac{n_0}{n_3} n_2^{2N}} \right)^2}$$

$n = c/\lambda$

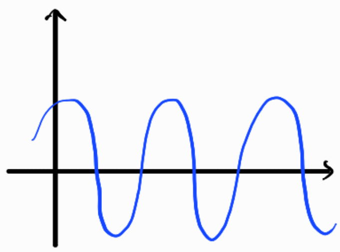


$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{4}{\pi} \arcsin\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)$$

↳ (λ_0 sarebbe λ su cui calc. d)

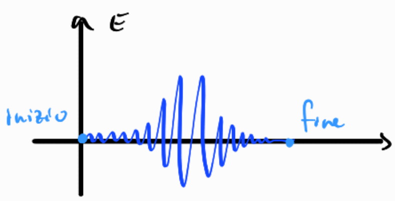
$n = n(\lambda) = c/\lambda$

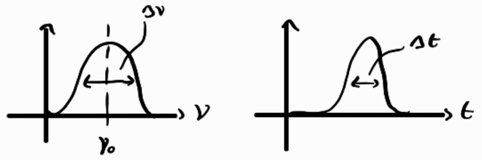
lunghezza di coerenza



continuous wave (cw) (laser): $E = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$

∄ nella realtà, i fasci non sono monocromatici e non sono continui a $\pm\infty$



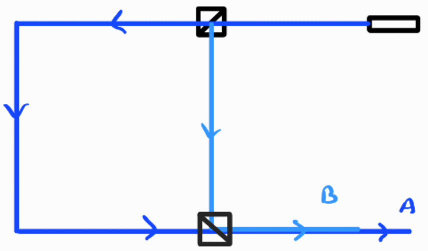


($\Delta t = 1/\Delta\nu$)

L = percorso fatto dalla luce in $L = c \cdot \Delta t = c/\Delta\nu \Rightarrow L = c/\Delta\nu$ lunghezza di coerenza

L mi da una stima ragionevole della lunghezza in cui il mio laser è in fase con se stesso

e.s. esperimento con beam splitter



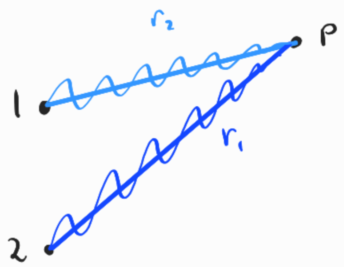
• se $L >$ diff. cammino ottico
↳ A e B coerenti fra di loro

Na
$\lambda = 589$ nm
$\Delta\nu = 5 \cdot 10^{11}$ Hz
$\Delta t = 1/\Delta\nu = 2$ ns
$L = c\,\Delta t = 0{,}6$ mm

He-Ne
$\lambda = 632{,}8$ nm
$\Delta\nu = 10^9$ Hz
$\Delta t = 1$ ns
$L = 30$ cm

single-mode
$L = 100$ m

interferenza



• 1,2 sorgenti coerenti fra di loro

$$\begin{cases} E_1 = E_{1_0} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}_1 - \omega t)} \\ E_2 = E_{2_0} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r}_2 - \omega t)} \end{cases}$$ (stessa freq ~ coerenti)

sovrapp. eff. (come sol. dell'eq. di Maxwell, eq. lin.) $\Rightarrow \bar{E}_{TOT} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$

$$I = |\bar{E}|^2 = |\bar{E}_1 + \bar{E}_2|^2 = |\bar{E}_1|^2 + |\bar{E}_2|^2 + \underbrace{2 \cdot \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2}_{2E_{1_0}E_{2_0}\cdot\cos(\Delta\phi)}$$

sfasamento tra i fasori

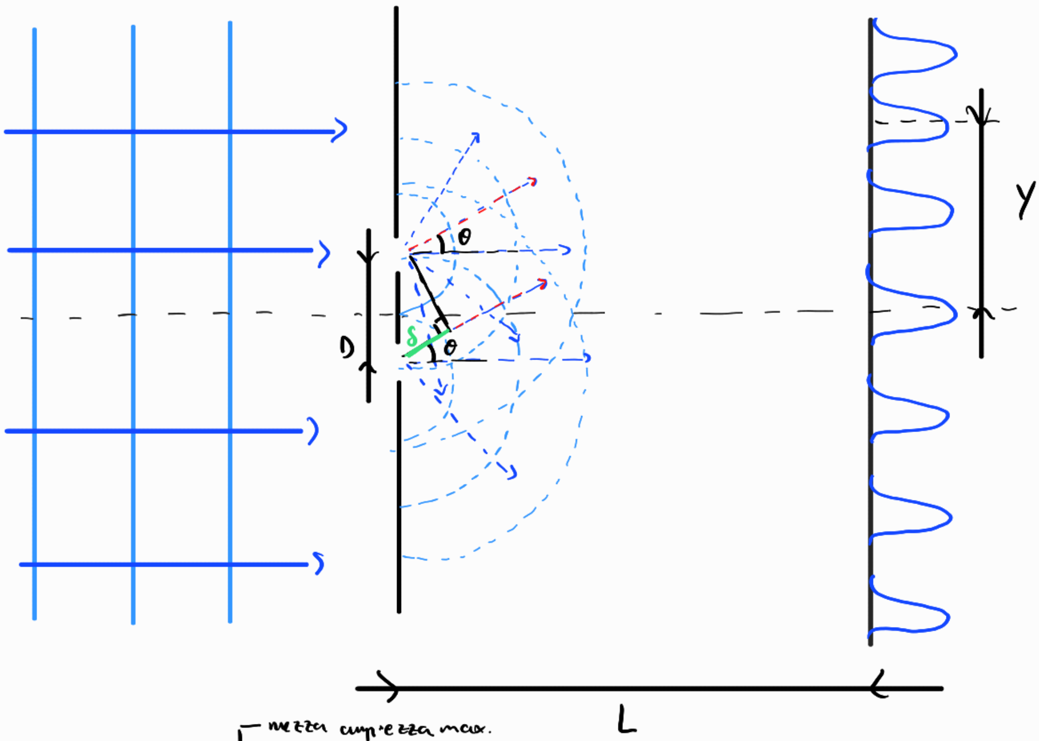
⇓

pongo $E_{1_0} = E_{2_0} = E_0$

⇓

$\Delta\phi$
- $\emptyset$ sono in fase $\Rightarrow I = 4E_0^2$ (interf. costruttiva)
- $180°$ sono in controfase $\Rightarrow I = \emptyset$ (interf. distruttiva)

$$\Delta\phi = k \cdot \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\text{diff. cammino ottico}}$$



$\delta = D \sin\theta \cdot k \sim kD\, y/L$

siccome θ piccolo ($y \ll L$)
↳ $\sin\theta \sim \tan\theta = y/L$

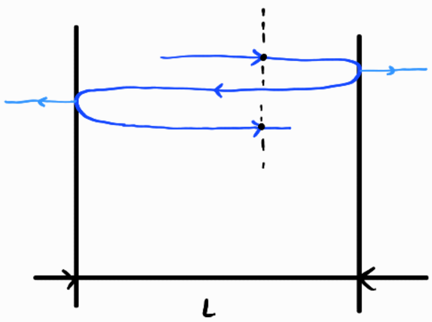
mezza ampiezza max.

$$\Rightarrow I = I_0 \left[1 + \cos(kDy/L)\right]$$

pongo la condiz. sullo sfasamento per avere interf. costruttiva: $kD\, y/L = m 2\pi$, $m \in \mathbb{N}$

(per trovare interf. distruttiva: minimi pongo $kD \cdot y/L = (2m+1)\pi$.)

cavità Fabry-Perot.

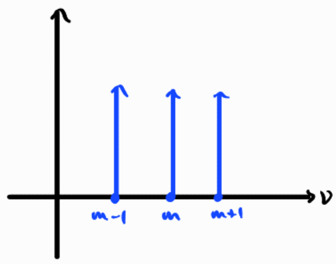


$k \cdot 2L = m \cdot 2\pi$ condiz. ∃ dei modi

$\cancel{2\pi}/\lambda \cdot 2L = m \cdot \cancel{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{L = m\, \lambda/2}$ $(\lambda = 2L/m)$

$\Rightarrow \nu = c/\lambda \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{c}{2L} \cdot m}$



sfasamento dovuto al cammino ottico

$$E = A + A r^2 e^{i2kL} + A r^4 e^{i4kL} + \dots + A (r^2)^m e^{i2kLm} = A \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} e^{i2mkL}}_{\text{serie geo. con } q = r^2 \cdot e^{i2kL}} = A \cdot \frac{1}{1 - r^2 e^{i2kL}}$$

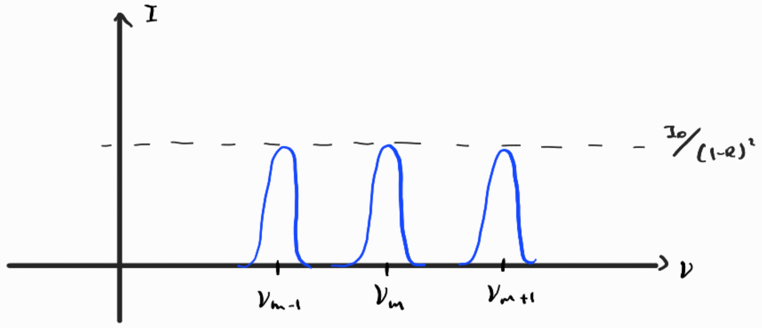
ampiezza non riflessa (A)

ampiezza dopo ② riflessioni (coeff. Fresnel) ($A r^2 e^{i2kL}$)

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{\underbrace{(1 - r^2\cos(2kL))^2}_{Re[\,]^2} + \underbrace{(r^2 \sin 2kL)^2}_{Im[\,]^2}} = \frac{I_0}{1 + R^2\cos^2(2kL) - 2R\underbrace{\cos(2kL)}_{1 - 2\sin^2(kL)} + R^2 \sin^2(2kL)}$$

$$= \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(kL))} \quad \frac{I_0}{1 + R^2 - 2R + 4R\sin^2(kL)} \Rightarrow \boxed{I = |E|^2 = \frac{I_0}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(kL)}}$$

$$I = \frac{I_0}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(kL)} \Rightarrow \begin{cases} \text{picchi: } kL = m\pi \\ \text{minimi: } kL = (m+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



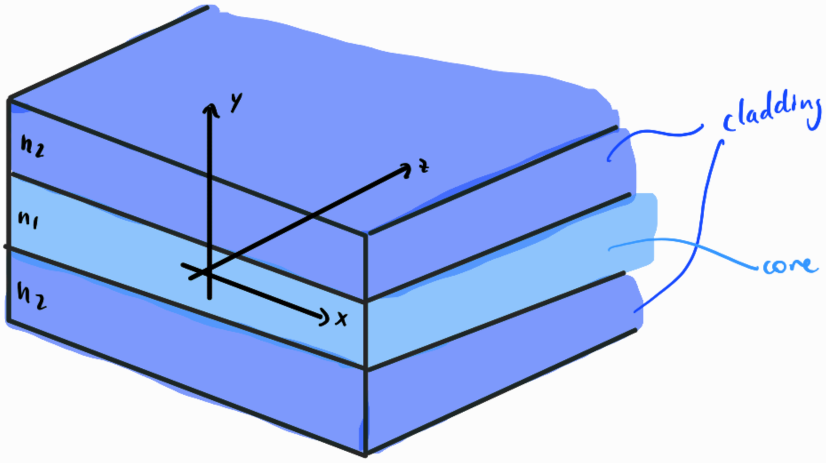
$\Rightarrow$ max. per $kL = m\pi \Rightarrow k = m\,\pi/L \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} = m\,\cancel{\pi}/L = \frac{2}{c}\nu = m/L$

$\nu = c/\lambda$

$\Rightarrow$ $\boxed{\nu = \frac{c}{2L}\cdot m}$ coincide proprio con le freq. dei modi ammessi che avevamo trovato precedentemente

guida d'onda (waveguide)

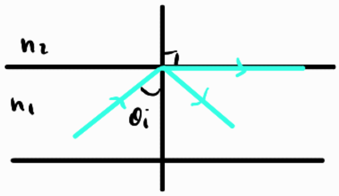
• mezzo che permette di trasmettere luce



$n_1 > n_2$ $(n_1 \sim 1{,}48,\ n_2 \sim 1{,}46)$

• permette l'intrappolamento della luce

• riflessione interna : da un mezzo più denso a uno meno denso

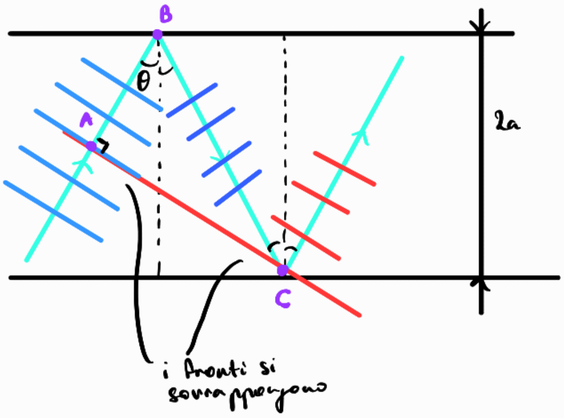


TIR : $\theta_i \geq (\theta_i)_c$

$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \Rightarrow \theta_t = 90° \Rightarrow (\theta_i)_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

• riflessione dopo riflessione trasmetto luce

• c'è un numero discreto di modi che si possono propagare nella guida



• nasce una interferenza tra i fronti

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC}\cos(2\theta) = \overline{BC}(1-2\sin^2\theta) \\ \overline{BC} = \frac{2a}{\cos\theta} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC}(1-2\sin^2\theta) + \overline{BC} = \overline{BC}(1-2\sin^2\theta+1)$

$= 2\overline{BC}(1-\sin^2\theta)$

$= \frac{4a}{\cos\theta}(1-\sin^2\theta)$

$= \frac{4a}{\cancel{\cos\theta}}(\cancel{1}-\cancel{1}+\cos^{\cancel{2}}\theta)$

$\Rightarrow \underbrace{\overline{AB}+\overline{BC} = 4a\cos\theta}_{\text{diff. di cammino ottico}}$

sfasamento : $k \cdot 4a\cos\theta$

per avere interferenza costruttiva : $k \cdot 4a\cos\theta_m - 2\varphi_m = m \cdot 2\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{\cancel{2}\pi}{\lambda/n_1} \cdot \cancel{4}a\cos\theta_m - \cancel{2}\varphi_m = m \cdot \cancel{2}\pi$

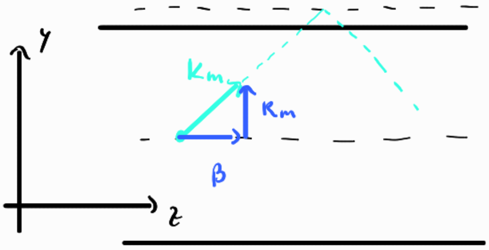
segno - per convenzione

sfasamento dovuto alle 2 riflessioni interne ($\theta_i \neq 0$ quindi lo sfasamento dovuto alla riflessione interna non è zero)

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{4\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - \varphi_m = m\pi}$

quindi ho degli angoli ammessi nella guida

per $m = 0, 1, \ldots,$ ho diversi **modi** che viaggiano nel core, riflettendo ad angoli diversi

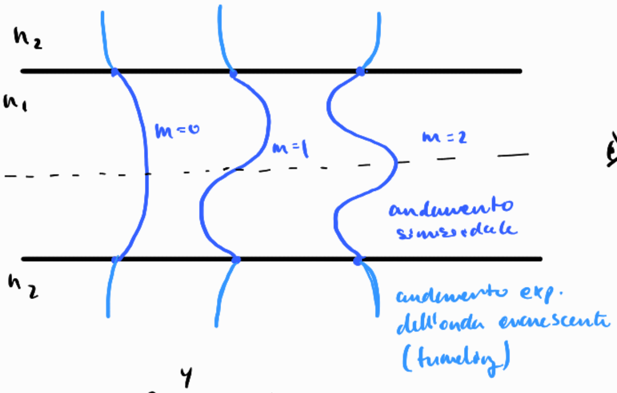


• scompongo l'onda in 2

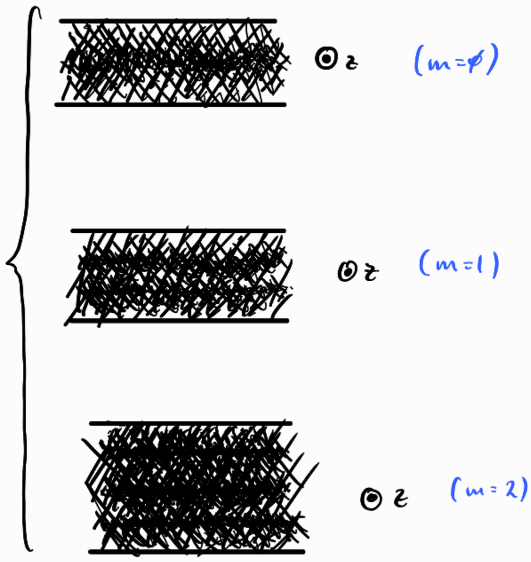
* β onda propagante verso z
* k_m onda staz. che oscilla/riflette su e giù lungo y

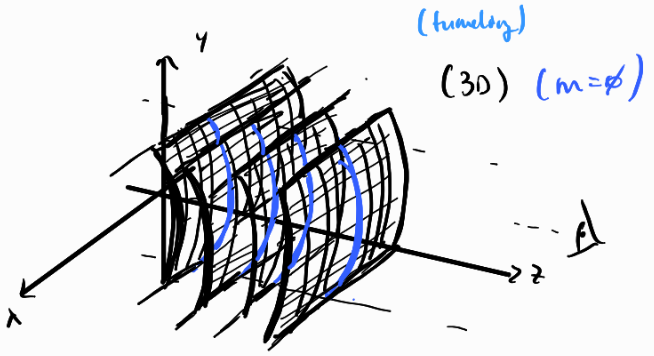
$$\boxed{E(y,z,t) = \underbrace{E_m(y)}_{\text{inviluppo}}\, e^{\overbrace{i(\beta_m z - \omega t)}^{\text{componente oscillante}}}}$$

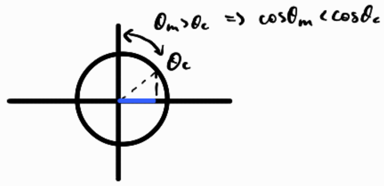
inviluppo: onda staz. che dipende da y e non da t. Dipende anche dal modo. Vari (modo) ho un inviluppo diverso



guardando da "davanti" ⇒







condiz. TIR: $\theta_m > \theta_c$ (θ_i)

$\Rightarrow \cos\theta_m < \cos\theta_c$

$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin\theta_t$$

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin^2\theta_c + \cos^2\theta_c = 1 \Rightarrow \cos\theta_c = \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

(prendo i val >0, siamo nel primo quadrante $\theta_i \in [0,\pi]$)

ricordando che: $\frac{4\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - \varphi_m = m\pi \Rightarrow \cos\theta_m = \frac{(m\pi + \varphi_m)\lambda}{4\pi a n_1}$

$$\Rightarrow \cos\theta_m < \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{4\pi a n_1}\cdot(m\pi + \varphi_m) < \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \Rightarrow m < \frac{2\cdot\frac{2\pi a n_1}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \varphi_m}{\pi} = \frac{2V-\varphi_m}{\pi} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2\pi a n_1}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$ V-number

è iterativa, φ_m è funz. di m

- per m crescenti l'angolo d'incidenza θ_m è sempre più piccolo. L'ultimo modo cioè per $\theta_m \to \theta_c$, $\varphi_m \to \emptyset$

- per trovare il numero di modi dunque considero $\varphi_m \to \emptyset$ che mi dà $m|_{max}$ e per trovare il numero di modi sommo +1 ($m=0$, $m=1$, $m=2$ ⇒ 2+1 modi)

⇒ $\boxed{M = n° \text{ modi} = \text{floor}\left(\frac{2V}{\pi}+1\right)}$ $\quad (= m|_{max}+1)$

arrotondo all'intero più basso

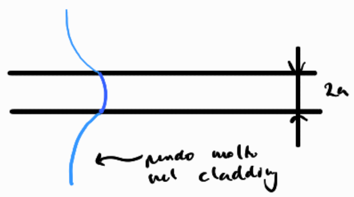
condiz. per avere un singolo modo: $m < \frac{2V-\varphi_m}{\pi} < 1 \Rightarrow \frac{2V-\varphi_m}{\pi} < 1 \Rightarrow V < \frac{\pi+\varphi_m}{2}$

siccome avrò un solo modo, quel modo sarà anche l'ultimo ⇒ $\varphi_m \to \emptyset$

⇒ $\boxed{V < \pi/2}$ condiz. di singolo modo, condiz. di cut-off: $\boxed{V \geq \pi/2}$ (quando nasce il secondo modo)

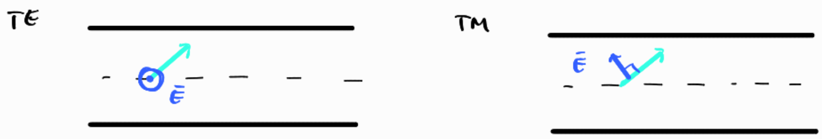
questa condiz. implica che: $V = \frac{2\pi a n_1}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} < \pi/2 \Rightarrow$ voglio a/λ piccolo cioè $a \ll \lambda$

ma se così fosse avrei questa situaz.:



quindi tendenzialmente ci poniamo con V poco sotto $\pi/2$ e quindi con $\lambda \sim a$

onde TE



$$\boxed{\tan\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_m - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_m}}$$

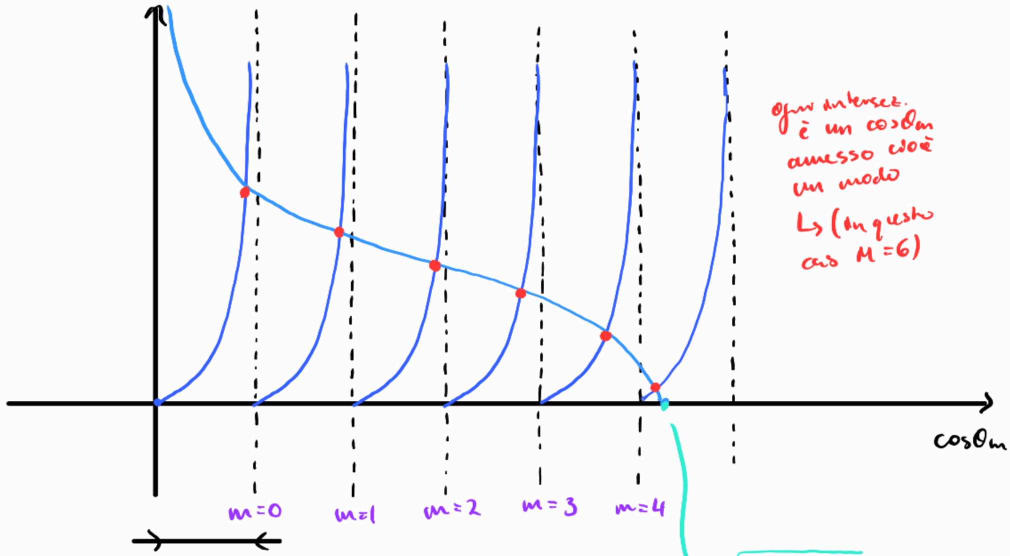
formula di Fresnell per onde TE

$$\tan\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_m - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_m} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_m - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_m} = \tan\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = \tan\left(\frac{2\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - m\frac{\pi}{2}\right)$$

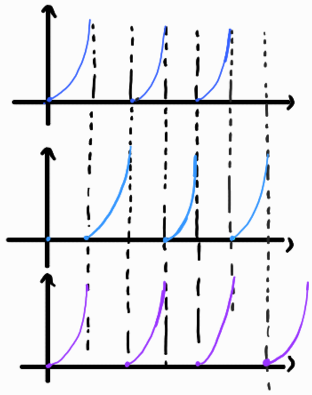
$$\left(\begin{array}{l}\frac{4\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - \varphi_m = m\pi \\ \varphi_m = \frac{4\pi a n_1}{\lambda} - m\pi\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_m - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_m}}_{f(\cos\theta_m)} = \tan\underbrace{\left(\frac{2\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - m\pi/2\right)}_{g(\cos\theta_m)}$$

risolviamo graficamente:



ogni intersez. è un $\cos\theta_m$ ammesso cioè un modo
↳ (in questo caso $M=6$)



• gli indici pari e dispari poi si sovrappongono

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_m-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\theta_m}=0$$

$$1-\cos^2\theta_m-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2=0$$

$$\cos\theta_m=\sqrt{1-\left(n_2/n_1\right)^2}=\cos\theta_c$$

$$\frac{2\pi a n_1}{\lambda}\cos\theta_m - m\frac{\pi}{2}=\pi/2$$

$$\Rightarrow \cos\theta_m=\frac{\lambda}{4an_1}(1+m) \Rightarrow \text{periodo}=\frac{\lambda}{4an_1}$$

$$M = \text{n° modi} = \text{floor}\left(\underbrace{\frac{\cos\theta_c}{\lambda/4an_1}+1}_{\substack{\text{n° di periodi che}\\ \text{ci stanno tra 0 e } \cos\theta_c\\ \text{(+1 per contare l'ultimo)}}}\right)$$

$$\Rightarrow M=\text{floor}\left(\frac{\cos\theta_c}{\lambda/4an_1}+1\right)=\text{floor}\left(\frac{\sqrt{1-(n_2/n_1)^2}\cdot 4an_1}{\lambda}+1\right)=\text{floor}\left(\frac{2\cdot 2\pi a n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\lambda\cdot\pi}+1\right)$$

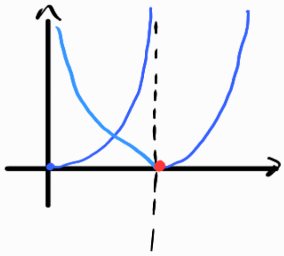
$$\Rightarrow M=\text{floor}\left(\frac{2V}{\pi}+1\right)$$ stesso risultato ottenuto precedentemente

condiz. di single-mode

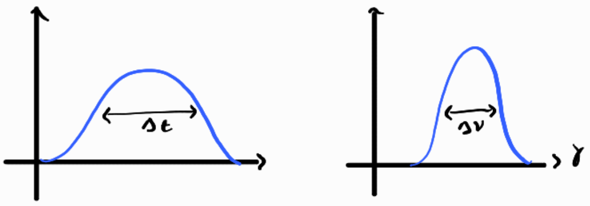
$$\cos\theta_c<\frac{\lambda}{4an_1}\Rightarrow\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}<\frac{\lambda}{4an_1}\Rightarrow\frac{2\cdot 2\pi a n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\lambda\pi}<1\Rightarrow\frac{2V}{\pi}<1$$

$$\Rightarrow V<\pi/2$$

↑ non mettiamo ≤ perché terremo conto anche il secondo modo



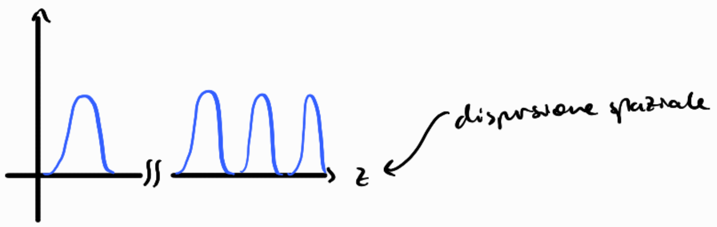
dispersione



$\Delta\nu = 1/\Delta t$

• processo per cui mentre il pacchetto si propaga nel tempo Δt si allarga (dispersione temporale)

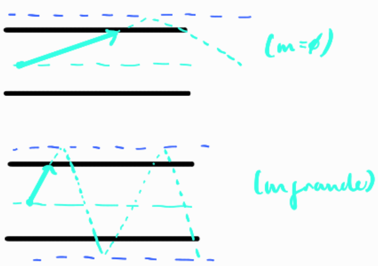
contributo intermodale



v_g velocità di gruppo: $\frac{d\omega}{dk}$ (=c nel vuoto)

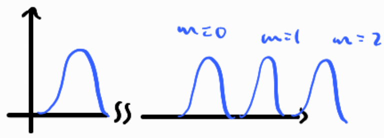
- a noi interessa come si propaga la luce verso z

$\hookrightarrow \frac{d\omega}{d\beta_m}$ dove $\beta_m = k_m \cos\theta_m$

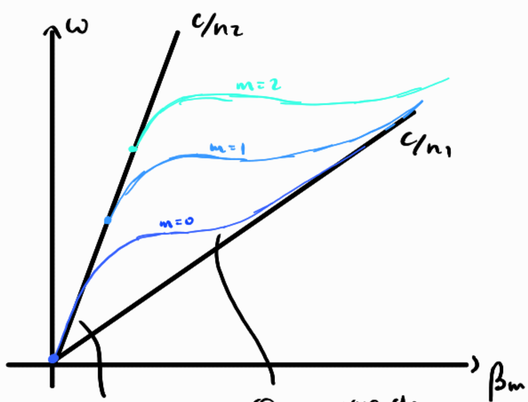


- I modi di ordine superiore a parità di asse z percorsa incidono di più il cladding che ha indice di rifraz. minore cioè è meno denso otticamente
- quindi nonostante i modi ad ordini inf. percorrino un cammino ottico minore, quelli di ordine maggiore percorrono più spazio in un mezzo meno denso e vanno dunque nel complesso più veloci

qualitativamente:

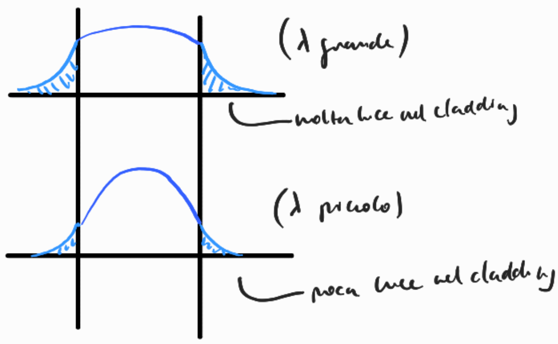


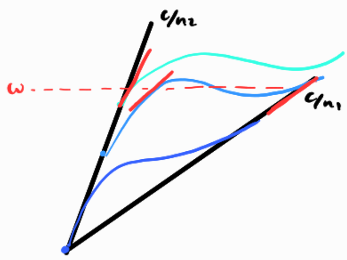
relaz. di dispersione



① per ω piccolo cioè λ grande l'onda viaggia nel cladding perciò stanno vicini all'asintoto c/n_2

② man mano che cresce ω e quindi dim. λ l'onda viaggia più nel core e quindi si avvicina all'asintoto c/n_1





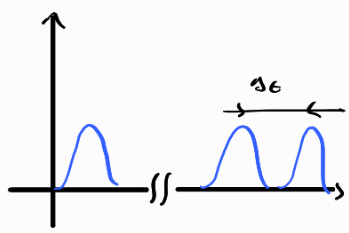
- a parità di ω i modi di ordine superiore sono più veloci (in via del fatto che percorrono più spazio nel cladding)

disp. dovuta a più modi

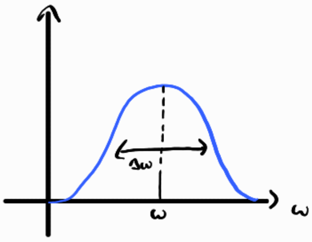
$$\Delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{L}{v_{min}} - \frac{L}{v_{max}} = \frac{L}{c/n_1} - \frac{L}{c/n_2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{L}{c}(n_1 - n_2)}$$

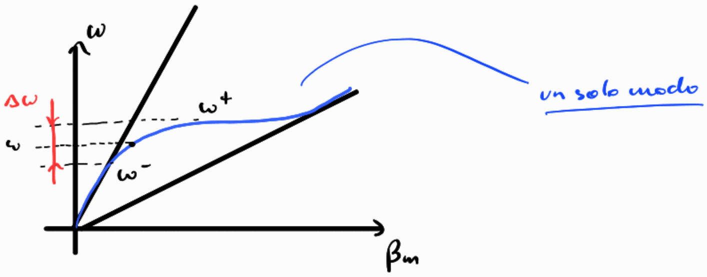
t_{max}: ultimo che arriva

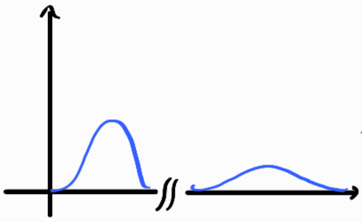
t_{min}: primo che arriva

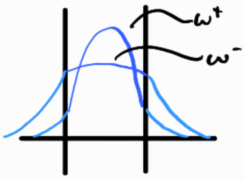


contributo intramodale









$\lambda = 2\pi c/\omega \Rightarrow \omega^+$ viaggia più lentamente

dispersione materiale

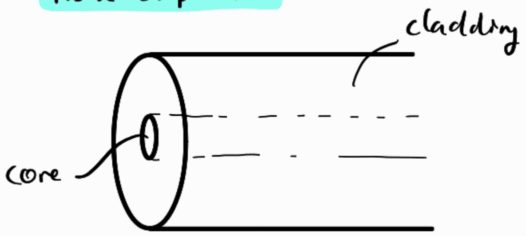
$n(\lambda)$ indice del core

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c/N_g$ $\quad N_g$ indice di gruppo: $\frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}$

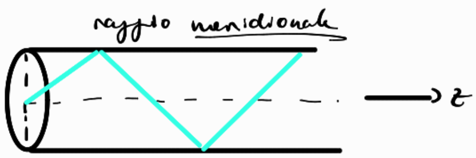
- non dipende dalla relaz. di disp. della guida ma dall'indice $n(\lambda)$ del materiale

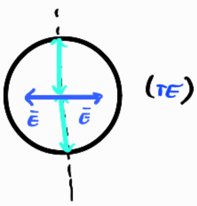
dispersione di guida: di guida perché dipende dalla relaz. di disp. della guida (inter/intra). Quella materiale è diversa.

fibra step-index



- rendo il cladding spesso per non far fuoriuscire luce per effetto tunnel





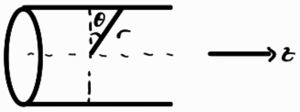
$E(r,\theta,z,t) = \underbrace{E_{\ell m}(r,\theta)}_{\text{funz. inviluppo}} \underbrace{e^{i(\beta_{\ell m} z - \omega t)}}_{\text{onda piana}}$

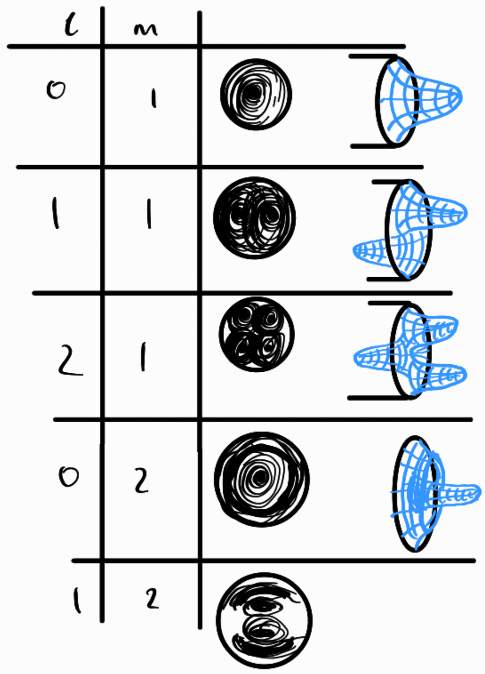
funz. inviluppo ⇓ descrive l'onda lungo una sezione

onda piana ⇓ descrive l'onda lungo l'asse z

ℓ: n° max. lungo θ (fisso r e vedo il n° di max. ruotando $\theta \in [0, \pi]$)

m: n° max. lungo r (fisso θ e vedo i max lungo r)





V number $= \frac{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\lambda} = \frac{2\pi a \sqrt{(n_1+n_2)(n_1-n_2)}}{\lambda} = \frac{2\pi a \sqrt{(2n)(n_1 \cdot \Delta)}}{\lambda}$

$\begin{cases} n = \frac{n_1+n_2}{2} & \text{val. medio} \\ \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_2} & \text{diff. relativa} \end{cases}$

$V < 2{,}405$ condiz. single mode

$M \sim V^2/2$ n° modi

dispersione in fibra

$\frac{\Delta t}{L} = \frac{\Delta n}{c} = \frac{n_1 \cdot \Delta}{c}$

disp. per fibre a singolo modo
$\begin{cases} \text{1) di guida} \Rightarrow \lambda \text{ corte sono + veloci} \\ \text{2) di materiale} \Rightarrow \lambda \text{ lunghe sono più lente per via della dipendenza di n da } \lambda \end{cases}$

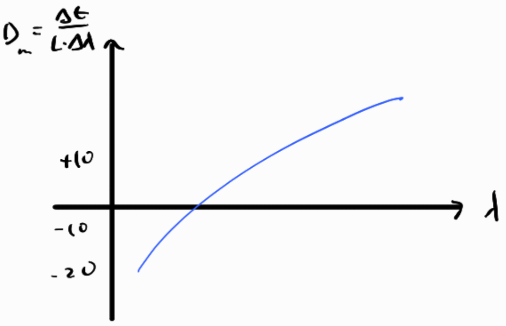
$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta t}{L} = D \cdot \Delta\lambda}$

$(\boxed{D = D_m + D_w})$ — D_m: mat., D_w: waveguide

dispersione di materiale: $t = \frac{L}{v_g} = L\frac{N_g}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{c} \cdot \frac{dN_g}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda \Rightarrow \frac{\Delta t}{L} = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{dN_g}{d\lambda}}_{D_m} \cdot \Delta\lambda$

$\Rightarrow \frac{\Delta t}{L} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dN_g}{d\lambda}\Delta\lambda = \frac{1}{c}\left[\cancel{\frac{dn}{d\lambda}} - \left(1 \cdot \cancel{\frac{dn}{d\lambda}} + \frac{d^2n}{d\lambda^2} \cdot \lambda\right)\right]\Delta\lambda = -\frac{\Delta\lambda}{c} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} \cdot \lambda$

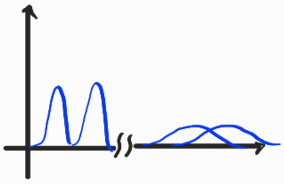
$N_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$



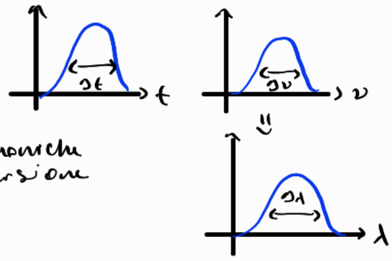
$\left[\frac{ps}{L \cdot \Delta\lambda}\right]$

$\boxed{\frac{\Delta\tau}{L} = |D_m| \, \Delta\lambda}$

con $\boxed{D_m = -\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2}}$

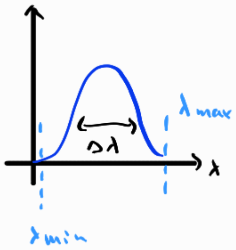


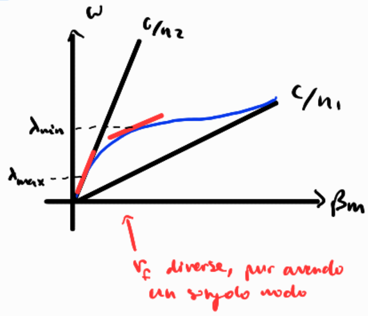
* dispersione materiale, $n(\lambda)$ dipende da λ => $\boxed{D_m = -\frac{\lambda}{c} \cdot \frac{d^2 n}{d\lambda^2} = \frac{\Delta\tau}{L\Delta\lambda}}$

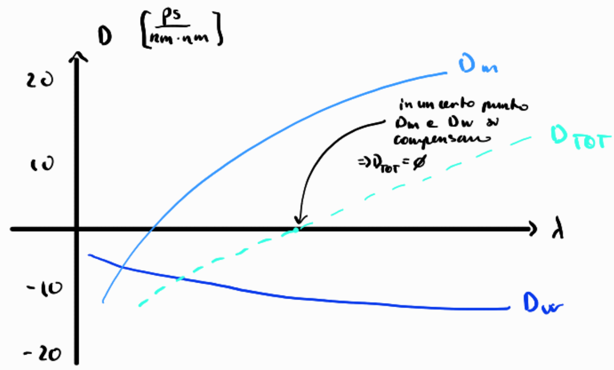


↳ più sono le componenti armoniche nel pacchetto più è la dispersione

* contributo di guida => $\boxed{D_w}$



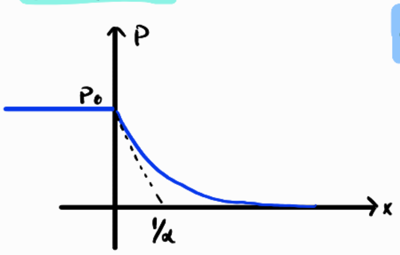




$\lambda|_{D_{TOT}=\emptyset} \sim 1550\,nm$ (nella fibra)

$D_{TOT} = D_m + D_w$

attenuazione

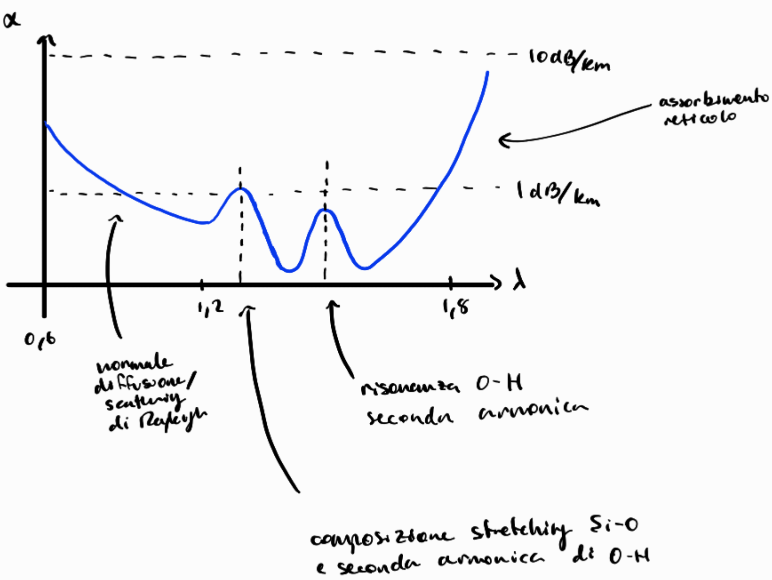


$\frac{dP}{dx} < 0$, metto un segno meno per avere $\alpha > 0$

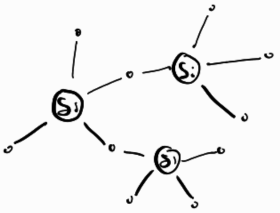
$\alpha = \boxed{-\underbrace{\frac{dP}{dx}}_{\text{quanta potenza perdo per una lunghezza percorsa}} \cdot \frac{1}{P}}$ } normalizzo per la potenza tot

$\alpha: \left[dB/km\right] \sim 0{,}6\, dB/km \sim 13\%$ di attenuaz.

$\Rightarrow P(x) = P_0 e^{-\alpha x} = P_0 e^{\frac{-1}{1/\alpha} x}$



Si-O stretching

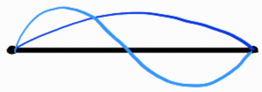


- la fibra in realtà non è un cristallo, è amorfa (infatti è un vetro)
- i legami sono come delle <u>molle</u>

=> <u>Si-O stretching mode</u> : freq. di risonanza con la freq. di oscillaz. delle "molle". La salita finale è proprio l'inizio di questo picco enorme (in $\lambda \sim 9{,}2\,\mu m$)

O-H stretching

<u>O-H stretching mode</u> $\sim 2{,}72\,\mu m$ $\xrightarrow[\text{comporta una seconda armonica}]{}$ $1{,}38\,\mu m$ $(\sim \lambda/2)$

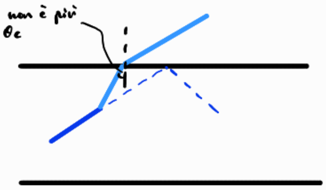


- il motivo per cui la seconda armonica non è proprio la metà è perché l'O-H si comporta da oscillatore quantistico, ma non in modo ideale/perfetto

- $\frac{1}{1{,}38} + \frac{1}{9{,}2} = \frac{1}{1{,}24}$ => composiz. stretching Si-O e seconda armonica di O-H

scattering di Rayleigh

- il mezzo ottico ha deformità che portano a scattering dei fotoni – è come se l'onda urtasse e andasse in direz. casuali

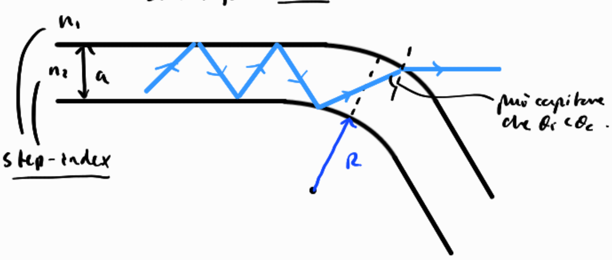


=> perdo fotoni nel cladding

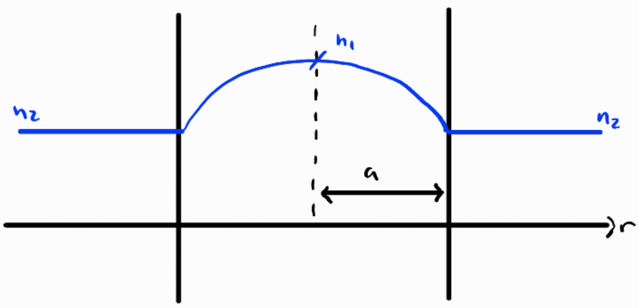
- lo scattering è maggiore a frequenze più alte

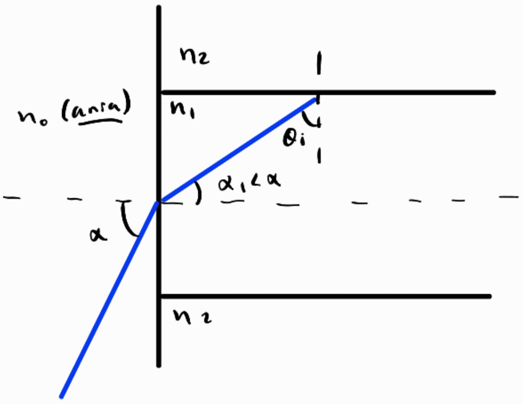
micro-bending

si ha per <u>$R \sim a$</u>



fibra graded index (grin)





$$n_0 \sin\alpha = n_1 \sin\alpha_1 = n_1 \cos\theta_i < n_1 \cos\theta_c \qquad (\text{per } \theta_i > \theta_c)$$

complementari

$$\Rightarrow n_0 \sin\alpha < n_1 \cos\theta_c \Rightarrow \sin\alpha < \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\sin^2\theta_c} \Rightarrow \sin\alpha < \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha < \frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0} = \frac{NA}{n_0}$$

$$\boxed{NA = \sqrt{n_1^2-n_2^2}}$$

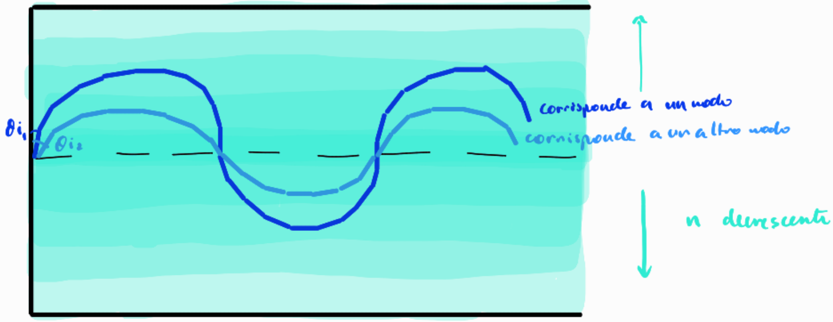
numerical aperture – mi da un'idea di quanto ampio può essere l'angolo di accoppiamento

- vorrei NA grande per avere più val. di α amessi per facilitare l'accoppiamento

- tuttavia: $V = \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \sqrt{n_1^2-n_2^2} = \frac{2\pi a\, NA}{\lambda} < 2{,}405$ per avere la condiz. di single mode per evitare la dispersione intermodale (che è la più fastidiosa)

$\Rightarrow$ c'è un conflitto / trade-off

$\hookrightarrow$ adottiamo la fibra graded-index che non risente di dispersione intermodale



$n \sin\theta_i$ = cost.

diminuisce gradualmente

aumenta finché $\theta_i = 90°$, poi si inverte

$$\underbrace{\text{traiettoria 1}}_{\text{faccio un percorso più lungo ma viaggio in } n \text{ meno densi}} > \overbrace{\text{traiettoria 2}}^{\text{percorso più breve ma in } n \text{ più densi}}$$

$\Rightarrow$ le cose si compensano e i modi viaggiano tutti alla stessa velocità

$\hookrightarrow$ non ho dispersione intermodale

$$\boxed{n = n_1 \cdot \sqrt{1-2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^\gamma}} \qquad (\text{per } r<a), \quad \gamma \sim 2$$

$$\Delta = \frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2} = \frac{(n_1+n_2)(n_1-n_2)}{2n_1^2} \sim \frac{\cancel{n_1}(n_1-n_2)}{n_1^{\cancel{2}}} = \frac{n_1-n_2}{n_1} \qquad (n_1 \sim n_2)$$

$$\frac{n_1+n_2}{2} \sim n_1$$

per $r = a \Rightarrow n = n_1 \cdot \sqrt{1-2\Delta}$ $\leftarrow \frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}$

$= \sqrt{\cancel{n_1^2} - \cancel{n_1^2} + n_2^2}$

$= n_2$

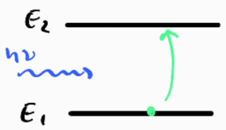
$\hookrightarrow$ si raccorda

laser

- Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

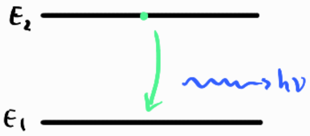
meccanismi fondamentali di transizione

assorbimento



- due livelli energetici
- se $h\nu \sim E_2 - E_1$ => l'elettrone può assorbire il fotone (quindi un quanto di energia) e può fare il salto al livello più alto (visione corpuscolare)
- visione ondulatoria : elettrone rimane nella stessa posizione (va da $3p \rightarrow 5p$) ma cambia la sua funzione d'onda, la sua energia (non da vedere come una transizione nello spazio)
- $h\nu$ deve essere risonante con l'energia necessaria per il salto (frequenza di Rabi)

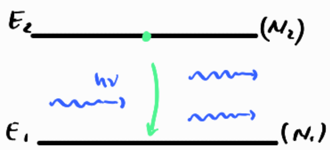
emissione spontanea



- avviene in modo casuale (Fermi golden rule)
- cede l'energia in eccesso sotto forma di un fotone
- l'elettrone vibrando a una certa freq. emette un fotone

(d'interesse per i LED)

emissione stimolata



- il fotone incidente induce il salto a un livello più basso
- il fotone emesso è coerente col primo. Avrà la stessa ν, k, polarizzaz., ...
- radiaz. EM risuona con la transiz. dell'elettrone. Il campo EM stimola l'elettrone che comincia a vibrare e rende energia che va ceduta al campo EM che acquista ampiezza / intensità => acquista fotoni

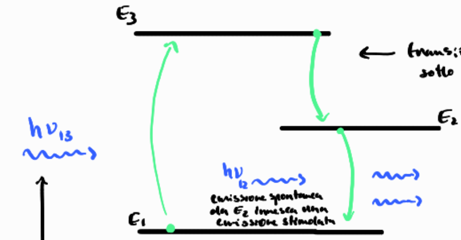
(d'interesse per i LASER)

↳ inversione di popolazione, condizione per amplificare la luce

=> $N_2 >> N_1$ (densità di elettroni) : implica un disequilibrio termodinamico. Normalmente l'energia più bassa è privilegiata.

=> ci serve qualcosa per tenere gli elettroni ad alto livello. Devo spendere energia per il passaggio da E_1 a E_2

- 2 stati non bastano. Ho il meccanismo di emissione stimolata in conflitto con quello di assorbimento, si raggiungerebbe un equilibrio => il n° min. di livelli per far funzionare il laser è pari a 3



← transizione non radiattiva: cedono l'energia sotto forma di fononi (onde elastiche del cristallo)

In E_2 ci vuole un tempo lungo $\tau \sim 3ms$ per avere emissione spontanea
⇒ ottimo! È condizione ideale per accumulare elettroni cioè avere inversione di popolaz. tra E_2 e E_1

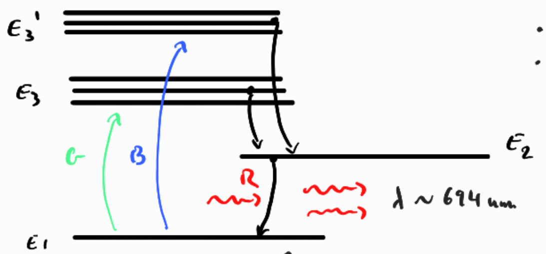
luce di pompaggio: la pompa è suff. forte da svuotare il livello E_1 fondamentale

Maiman (1960)

$Cr^{3+}: Al_2O_3$ laser a rubino

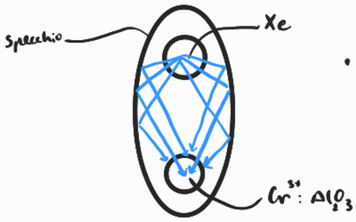
↑

drogato cromo: è lui che da le prop. ottiche



- come luce da pompa si usa un flash di Xenon
- il cromo assorbe verde e blu e emette rosso

è difficile da svuotare il livello fondamentale. Li ci vanno spontaneamente gli elettroni. Devo essere efficiente nel pompaggio ⇒ adotto una geometria ellittica

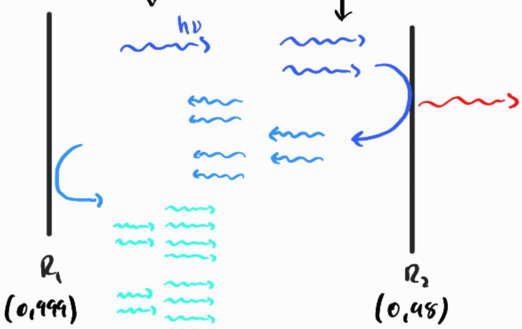


- Xe e $Cr^{3+}:Al_2O_3$ sono posizionati nei fuochi dell'ellisse, tutti i raggi provenienti dal Xenon finiscono sul cristallo

seconda importante condizione: cavità
(oltre all'inversione di popolaz.)

fotone di innescamento

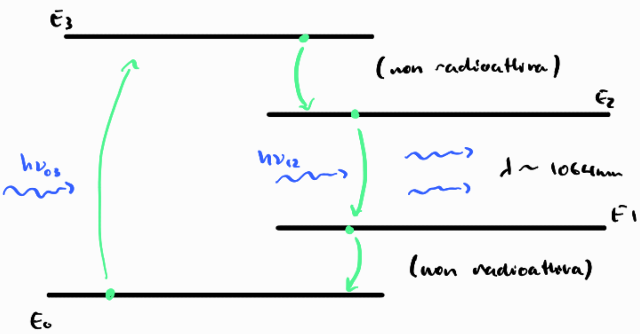
voglio "riciclare" questi fotoni per far innescare altre emissioni stimolate ⇒ metto il cristallo tra due specchi



così qualcosa fuoriesce
⇒ emetto un fascio coerente di luce

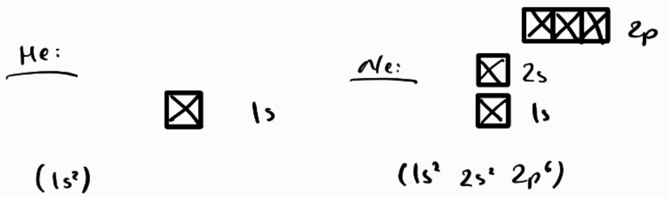
laser a 4 livelli

$Nd^{3+}: YAG$ $(Y_3Al_5O_{11})$

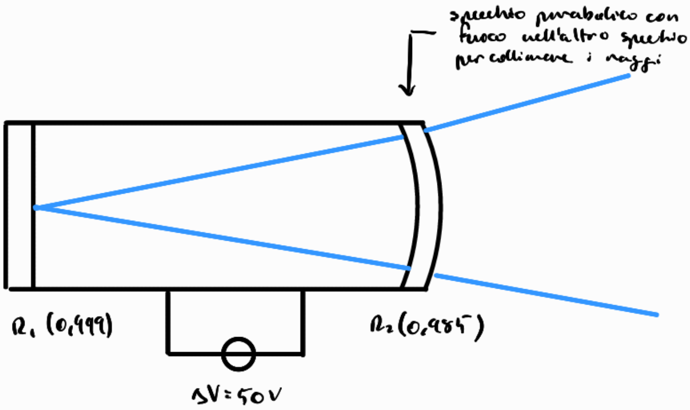


- inversione di popolaz. tra E_1 e E_2
- è molto più facile svuotare E_1 che E_0. Lo stato E_0 dunque non deve essere vuoto
- può essere anche operato in continuo (CW). Il rubino non può funzionare in continua, dispendo troppa energia per svuotare lo stato fondamentale, devo usare la pompa in regime impulsato

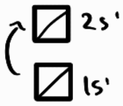
laser He-Ne



- 1,3 mbar
- 10 atomi di He / atomo di Neon ⇒ He : Ne = 10 : 1
- il meccanismo laser avviene fra i livelli di Neon

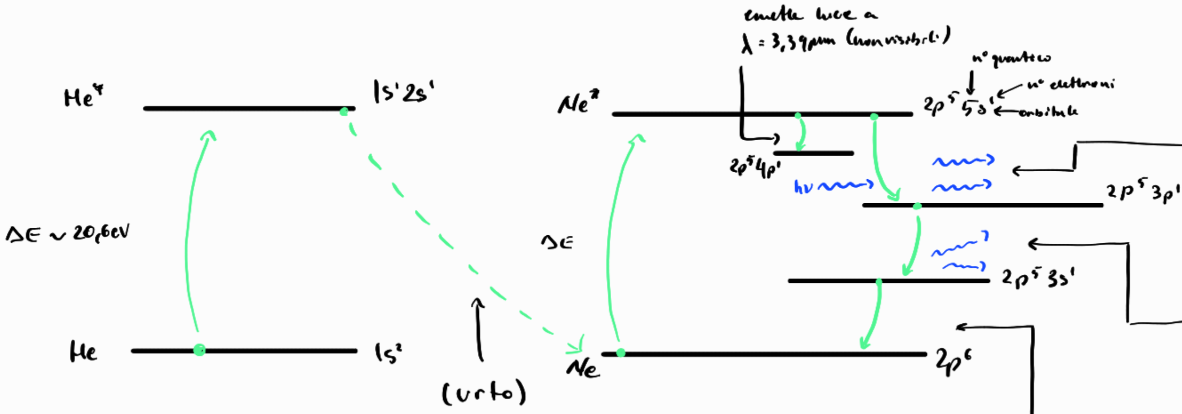


$He + e^- \longrightarrow \underbrace{He^*}_{\text{stato eccitato}} + e^-$



(gli elettroni che eccitano l'elio sono forniti dal gen. di tensione)

- l'elio urta con il Neon : $He^* + Ne \longrightarrow He + Ne^*$



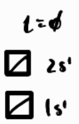
emissione spontanea (solo l'innescamento è stimolato)
$\lambda \sim 632,8nm$ (il fascio uscente è coerente con l'innescamento)
(l'inversione è tra $2p^5 5s'$ e $2p^5 3p'$)

emissione spontanea ⇒ luce incoerente ⇒ contamina la luce del laser ma in modo poco significativo

Ne eccitato si rilassa in $2p^6$. Tuttavia c'è un problema di spin. A volte c'è bisogno di flippare lo spin quindi la transiz. spontanea è difficile. Dunque la transizione avviene principalmente tramite l'urto con le pareti, ed è importante che avvenga per ripopolare $2p^6$

⇒ rendo il laser stretto per aumentare frequenza/probabilità di urti

- l'He non transiziona spontaneamente da He^* a He
⇒ per la transizione radioattiva serve : $\Delta l = \pm 1$



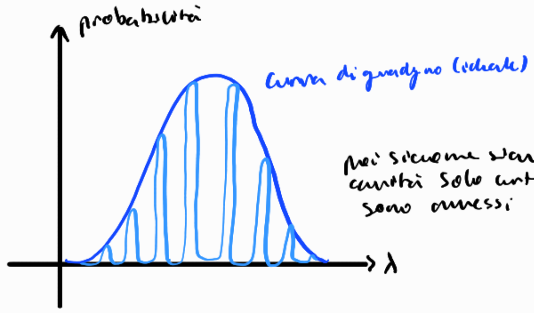
$l = \phi$ quindi 2s' ⟶ 1s' non è possibile (da livello s ad s)

(invece per esempio da s ⟶ p va bene)

- $2p^5 4p'$ in competizione con $2p^5 3p'$ ⇒ come privilegio lo stato $2p^5 3p'$?
↳ uso specchi che sono trasparenti per $\lambda = 3,39\mu m$

effetto Döppler

· le particelle di gas si muovono mentre emettono



ma siccome siamo in una cavità solo certi modi sono ammessi

atomo	osservatore
t_0	$t_0 + d/c$
$t_0 + T$	$t_0 + T + \frac{d - vT}{c}$

$\nu = \frac{1}{T}$ frequenza con cui viene emessa la radiaz.

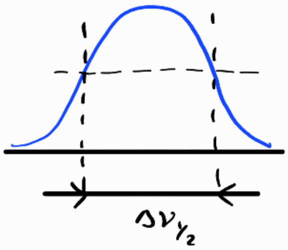
$$\Rightarrow \nu' = \underbrace{\frac{1}{T - \frac{vT}{c}}}_{\text{periodo apparente}} = \frac{\nu}{1 - v/c} \sim \boxed{\nu(1 + v/c)}$$ (se l'atomo si muove verso di me)

$$\boxed{\nu(1 - v/c)}$$ (se l'atomo si allontana)

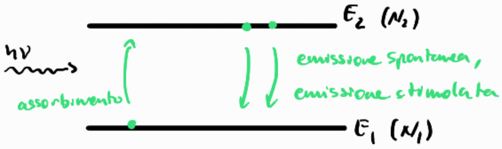
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$\hookrightarrow \quad \Delta\nu = 2\nu \cdot \sqrt{\frac{3kT}{mc^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\nu_{1/2} = 2\nu \cdot \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{mc^2}}}$$



guadagno



$h\nu = \Delta\nu = E_2 - E_1$

$R_{12} = N_1 \cdot \rho(\nu) \cdot B_{12}$ rate di assorbimento

$\rho(\nu)$: densità di fotoni (energia) risonanti con ν

B_{12}: coeff. di proporzionalità

$R_{21} = \underbrace{N_2 A_{21}}_{\text{spontanea}} + \underbrace{N_2 \rho(\nu) B_{21}}_{\text{stimolata}}$ rate di emissione

• ci poniamo in una condizione di equilibrio per trovare i coeff. (il laser ovviamente poi non lavora all'equilibrio, necessita di inversione di popolaz.)

$\hookrightarrow R_{12} = R_{21}$

$*$ $\dfrac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ (statistica di Boltzmann)

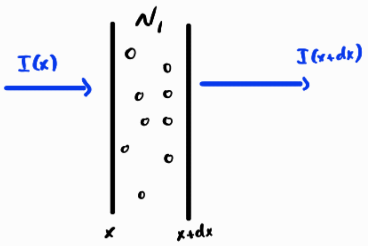
$*$ $\rho_T(\nu) = \dfrac{8\pi}{c^3} \cdot \nu^2 \cdot \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ (teoria di Planck – radiazione del corpo nero)

$$\Rightarrow R_{12} = R_{21} \Rightarrow N_1 \rho(\nu) B_{12} = N_2 A_{21} + N_2 \rho(\nu) \cdot B_{21} \Rightarrow B_{12} = \frac{N_2 A_{21}}{\rho(\nu) N_1} + \frac{N_2 B_{21}}{N_1} = \frac{1}{\rho} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot A_{21} + e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot B_{21}$$

$$= \frac{c^3}{8\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}{h\nu} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot A_{21} + e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot B_{21} = \underline{\frac{c^3}{8\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{h\nu} A_{21}} - \underline{\frac{c^3}{8\pi} \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{h\nu} \cdot A_{21} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}} + \underline{e^{-\frac{h\nu}{kT}} \cdot B_{21}} = \underline{B_{12}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{12} = A_{21} \cdot \dfrac{c^3}{8\pi h\nu^3} \\ B_{21} = A_2 \cdot \dfrac{c^3}{8\pi h\nu^3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B_{21} = B_{12} = A_{21} \cdot \frac{c^3}{8\pi h\nu^3}}$$

fuori equilibrio



assorbimento:

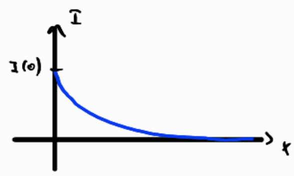
$I(x) - \overbrace{I(x) \cdot N_1 \cdot \sigma_a \cdot dx}^{\text{termine dovuto all'assorbimento}} = I(x+dx)$

σ_a: sezione d'urto [cm²]; dx: spessore

$$\Rightarrow \frac{I(x+dx) - I(x)}{dx} = -I(x) \cdot N_1 \cdot \sigma_a$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial I}{\partial x} = I(x) \cdot N_1 \cdot \sigma_a \Rightarrow I(x) = I(0) \cdot e^{-\alpha x}$$

$(\text{con } \alpha = N_1 \sigma_a)$



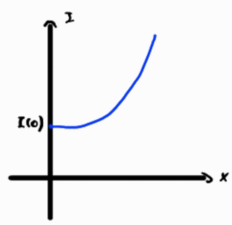
emissione stimolata:

$I(x) + \underbrace{I(x) N_2 \sigma_e \cdot dx}_{} = I(x+dx)$

termine dovuto all'emissione (generalmente $\sigma_e \neq \sigma_a$)

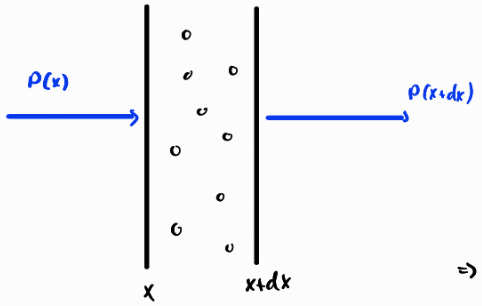
si ricava analogamente al caso dell'assorbimento: $I(x) = I(0) e^{g' x}$

(con $g' = N_2 \cdot \sigma_e$ guadagno)



$\Rightarrow$ $g = g' - \alpha = \sigma_e N_2 - \sigma_a N_1$ guadagno netto

• studiamo ora il bilancio nel tempo (abbiamo appena visto nello spazio)



$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dx} = g$ aumento relativo di potenza (e quindi di concentraz. di fotoni)

normalizzo l'incremento alla potenza del fascio

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dx} = \frac{1}{N_{ph}}\cdot\frac{dN_{ph}}{dx} = \frac{1}{N_{ph}}\cdot\underbrace{\frac{dN_{ph}}{dt}}_{\text{rate di variaz. dei fotoni}}\cdot\frac{1}{dx/dt}$$

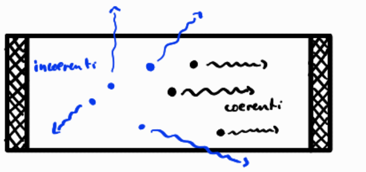
N_{ph}: $\left[\frac{\text{n° fotoni}}{cm^3}\right]$

$\frac{1}{dx/dt}$: velocità dei fotoni $= \frac{c}{n}$, n indice di rifraz. della cavità

$$\Rightarrow g = \frac{n}{cN_{ph}}\cdot\overbrace{\left(\underbrace{N_2\,\rho(\nu)B_{21}}_{\text{contributo emissione stimolata}} - \underbrace{N_1\cdot\rho(\nu)\cdot B_{12}}_{\text{contributo assorbimento}}\right)}^{\text{rate di var. dei fotoni}}$$

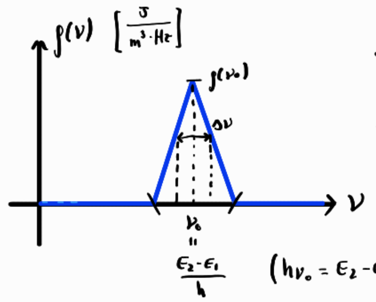
• non considero l'emissione spontanea perchè prevale la stimolata siccome $N_{ph} >> N_{ph}|_{equilibrio}$ quindi ho molti fotoni che innescano l'emissione stimolata,

• inoltre, se includessimo la spontanea, staremmo considerando dei fotoni incoerenti che vengono emessi dalla cavità in modo isotropo

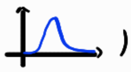


$$\Rightarrow B_{12} = B_{21} = A_{21}\cdot\frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \Rightarrow \boxed{g = \frac{n}{cN_{ph}}\cdot A_{21}\cdot\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\cdot\rho(\nu)\cdot(N_2-N_1)}$$

(all'eq. $N_2 = N_1 = \emptyset \Rightarrow g = \emptyset$)



$(h\nu_0 = E_2 - E_1)$

• approx. $\rho(\nu)$ a un triangolo (in realtà: )

$\Rightarrow N_{ph} = \Delta\nu\cdot\rho(\nu_0)\cdot\frac{1}{h\nu}$ (area del triangolo)

$\Delta\nu$: $\frac{1}{2}$·base; $\rho(\nu_0)$: altezza; $h\nu$: energia del singolo fotone

$$R_{21} = A_{21}\cdot N_2 = \frac{N_2}{\tau_{sp}} \Rightarrow A_{21} = \frac{1}{\tau_{sp}}$$

(contributo emissione spontanea)

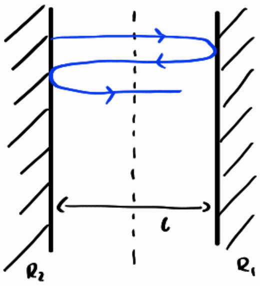
τ_{sp}: tempo di "decadimento" per l'emissione spontanea

$$\hookrightarrow g = \frac{n}{cN_{ph}}\cdot A_{21}\cdot\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\cdot\rho(\nu)\cdot(N_2-N_1) = \overbrace{(N_2-N_1)}^{\text{pompaggio}}\cdot\frac{c^2\cdot h\nu}{n^2\cdot 8\pi h\nu^3\cdot\Delta\nu\cdot\tau_{sp}}$$

$$\left[\begin{array}{l} N_{ph} = \Delta\nu\cdot\rho(\nu)\cdot\frac{1}{h\nu} \\ \Rightarrow \frac{\rho(\nu)}{N_{ph}} = \frac{h\nu}{\Delta\nu} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{g = (N_2-N_1)\frac{c^2}{8\pi n^2\nu^2\Delta\nu\,\tau_{sp}}}$$

guadagno a soglia



non contiene l'assorbimento della transizione laserata

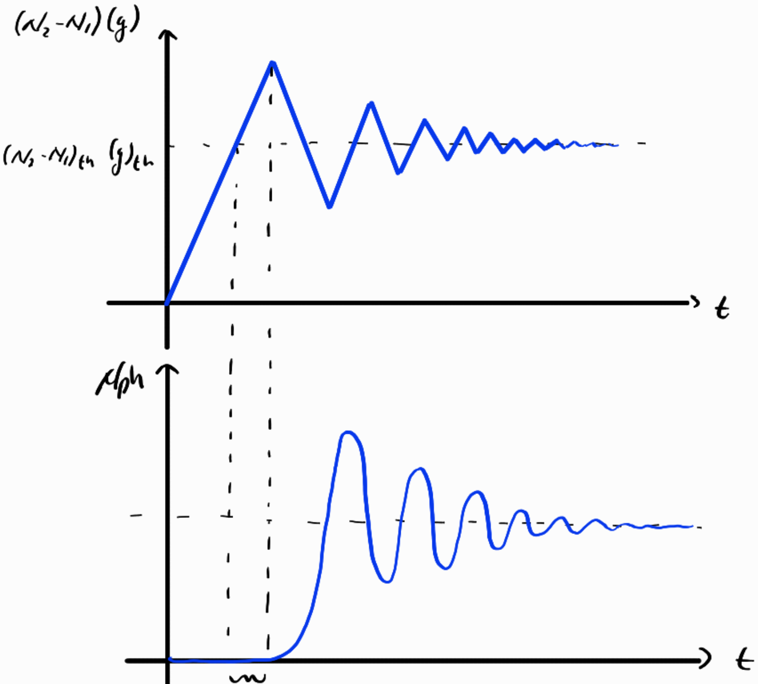
$$P_f = P_i \cdot \underbrace{e^{g \cdot 2L}}_{\text{guadagno}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha_s \cdot 2L}}_{\text{scattering}} \cdot \underbrace{R_1 \cdot R_2}_{\text{perdite dovute agli specchi}}$$

<u>condizione minima di soglia di accensione</u> del laser : $P_f = P_i \Rightarrow \cancel{P_f} = \cancel{P_i}\, e^{g 2L} \cdot e^{-\alpha_s \cdot 2L} \cdot R_2 \cdot R_1 \Rightarrow e^{g 2L} = e^{\alpha_s 2L} \cdot \frac{1}{R_2 \cdot R_1}$

$$\Rightarrow e^{g_{th} \cdot 2L} = e^{\alpha_s \cdot 2L} \cdot \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow \underbrace{g_{th}}_{\text{guadagno di threshold}} \cdot 2L = \alpha_s 2L - \ln R_1 \cdot R_2$$

$$\Rightarrow g_{th} = \alpha_s - \frac{1}{2L} \cdot \ln R_1 \cdot R_2 = \alpha_t$$ total loss

$$\Rightarrow (N_2 - N_1)_{th} = \frac{8 \pi n^2 \nu^2 \cdot \Delta\nu \cdot \tau_{sp}}{c^2} \cdot g_{th}$$ dove g_{th} è dato dal total loss

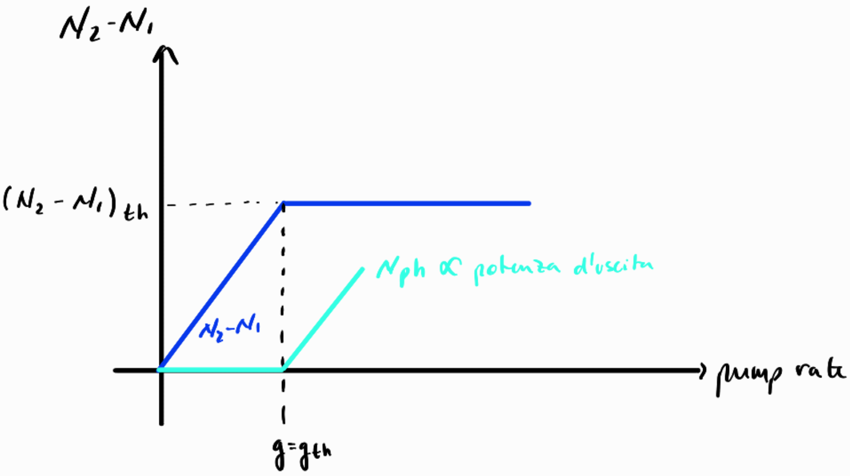


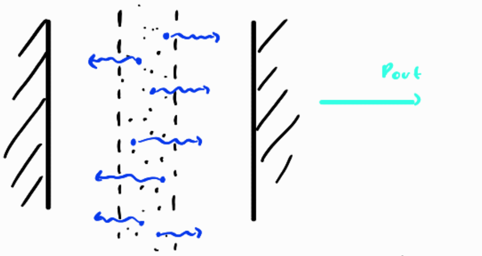
devo andare un po' sopra soglia prima di osservare potenza in uscita

- l'aumento di N_{ph} impoverisce lo stato alto N_2 fino a prevalere sulla pompa $\Rightarrow (N_2 - N_1)$ decresce
- però se decresce sotto soglia, N_{ph} scende e la pompa prevale $\Rightarrow (N_2 - N_1)$ cresce

↳ i due processi si ripetono fino ad assestarsi ad un eq.

$\Rightarrow$ la pompa serve solo al transitorio iniziale





$(N_{ph}) \Rightarrow \frac{1}{2}$ va a dx, $\frac{1}{2}$ a sx

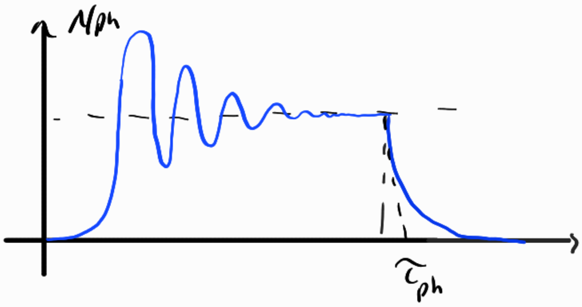
$$\boxed{P_{out} = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot N_{ph}\cdot\frac{c}{n}}_{\text{flusso}}\cdot\underbrace{h\nu}_{\text{energia}}\cdot\underbrace{A}_{\text{area della cavità}}\cdot(1-R_1)} \quad \propto N_{ph}$$

lifetime della cavità

$$\phi(t) - \phi(t)\cdot dt\cdot\alpha_t\cdot 2L\cdot\frac{1}{2L/c/n} = \phi(t+dt)$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\phi(t)\cdot\frac{\cancel{2L}\cdot\alpha_t}{\cancel{2L}\cdot n/c}$$

- spengo la pompa: N_{ph} e g diminuiscono a $\emptyset$ dopo un certo tempo
- i fotoni continueranno a propagarsi nella cavità ma prevarrà l'assorbimento



$$\phi(t) - \phi(t)\cdot\alpha_t\cdot 2L\cdot dt\cdot\frac{1}{2L/\frac{c}{n}} = \phi(t+dt)$$

tempo per percorrere un tragitto di 2L

$$\frac{\partial\phi_{ph}}{\partial t} = -\frac{\phi_{ph}\cdot\cancel{2L}\,\alpha_t \;\leftarrow m^{-1}}{\cancel{2L}\cdot\frac{n}{c}\;\leftarrow s\cdot m^{-1}}$$

flusso fotonico che percorre 2L

$$= -\frac{\phi_{ph}}{\tau_{ph}\;\leftarrow s}$$

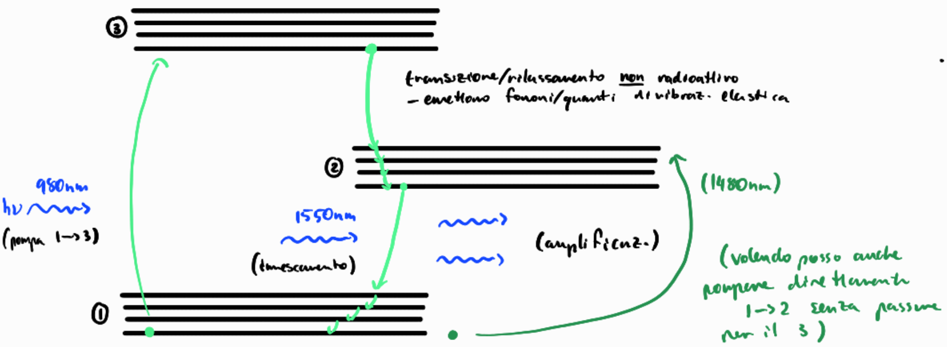
con $\boxed{\tau_{ph} = \frac{n}{c\,\alpha_t}}$

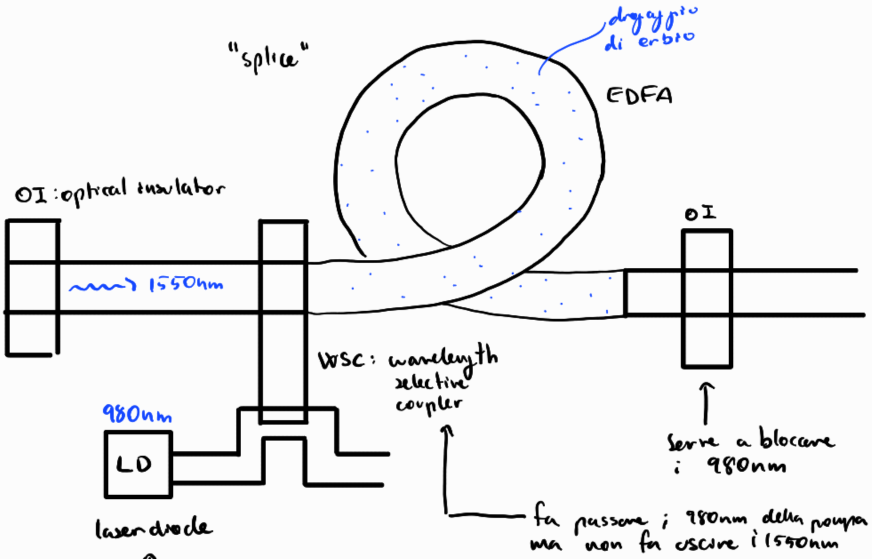
erbium doped fiber amplifier (EDFA)

$Er^{3+} : SiO_2 : Al_2O_3$

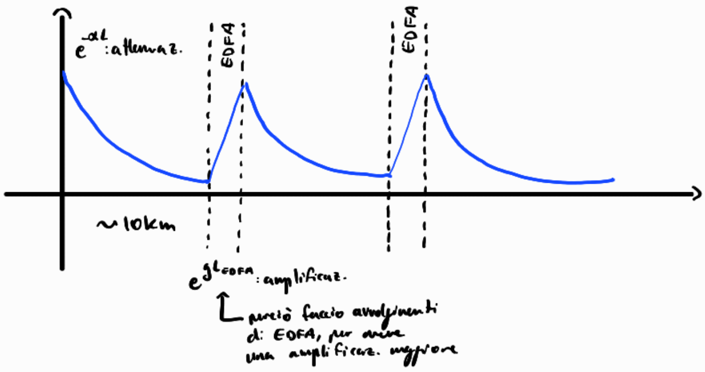
• usiamo l'erbio proprio perchè emette fotoni a 1550nm, cioè λ t.c. ho dispersione minima

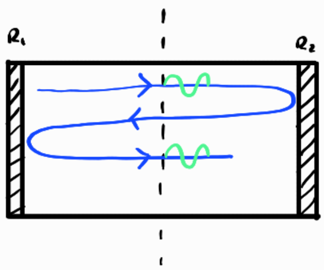
• $g = \sigma_e N_2 - \sigma_a N_1 > \varnothing$





è la mia pompa. Se non ci fosse l'erbio assorbirebbe e non avrei guadagno





le 2 onde si devono sommare in fase

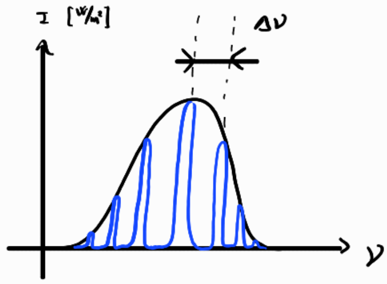
$\Rightarrow k \cdot 2L = m \cdot 2\pi \qquad m = 1, 2, \dots,$

$\Rightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} \cdot n \cdot 2L = m \cancel{2\pi} \Rightarrow L = m \frac{\lambda}{2n}$

indice di rifrazione

$\Rightarrow \boxed{\nu_m = m \frac{c}{2L \cdot n}}$ modi ammessi

$L = m \cdot \frac{\lambda}{2n} \Rightarrow m = 2n \cdot \frac{L}{\lambda}$ ($L \sim 0{,}5$cm, λ 500nm) $\Rightarrow m \sim 10^6$



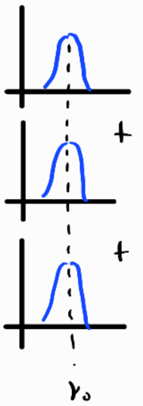
$\Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m \Rightarrow \boxed{\Delta\nu = \frac{c}{2L \cdot n}}$

FSR: free spectral range

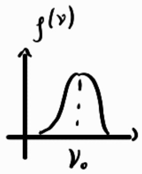
allargamento del laser

allargamento
- omogeneo
- inomogeneo

Omogeneo



$\Rightarrow$

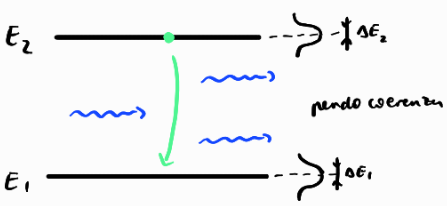


$$\boxed{\rho(\nu) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}}$$

Lorentziana

- ogni atomo lavora alla stessa freq. ma ogni atomo ha una certa allargamento

* allargamento omogeneo naturale



$$\Delta E_{21} \sim \sqrt{\Delta E_1^2 + \Delta E_2^2}$$

$$\Delta E_{21} = h \cdot \Delta\nu$$

energia dello stato

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

vita media di uno stato

(è un altro modo di vedere il principio di indet. di Heisenberg)

solo se $\Delta t \longrightarrow \infty$, $\Delta E \longrightarrow \emptyset$ ma $\nexists$ lifetime ∞

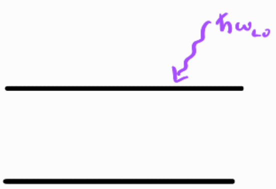
i livelli sono stati metastabili, prima o poi : fotoni decadono spontaneamente $\Rightarrow \tau_{sp}$ tempo medio di rilassamento spontaneo

$$\Rightarrow \Delta E \geq \frac{1}{\Delta t} \cdot \hbar/2$$

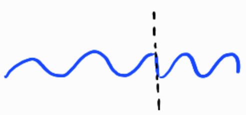
$$\Rightarrow \Delta E_{21} = h\Delta\nu \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\Delta E_{21}}{h} \sim \frac{1}{\tau_{sp}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_{sp}}}$$

* collisionale



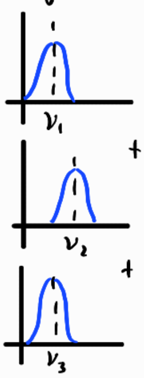
$\hbar\omega_{LO}$ (fonone) $\Rightarrow$ disturba la radiaz. $\Rightarrow$ perdita di coerenza



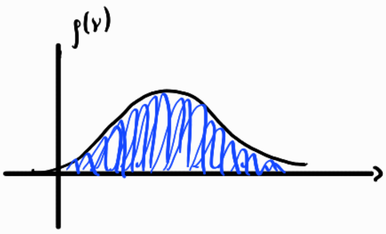
urto $\Rightarrow$ gradino $\Rightarrow$ freq. spurie

(o la vedo come uno smorzamento)

Inomogeneo



$\Rightarrow$



$$\boxed{\rho(\nu) = \rho_0\, e^{-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}}}$$

Gaussiana

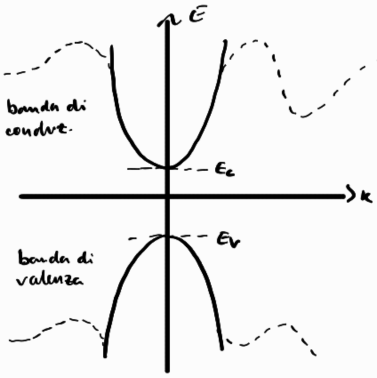
* doppler (nei gas)

* disordine (nei solidi)

e.s. $Cr^{3+}: Al_2O_3$

ogni atomo di cromo si lega in modo diverso con gli atomi adiacenti
↳ ogni atomo di cromo risente dei suoi dintorni => quell'atomo lascia a freq. diversa

semiconduttori



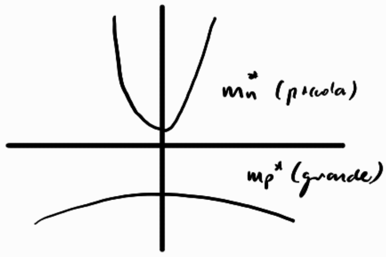
• approx. parabolica (=> sviluppo di Taylora al II° ordine nell'intorno del minimo)

$$E = E_c + \frac{p^2}{2m} = E_c + \frac{(\hbar k)^2}{2m_n^*}$$

↳ massa eff. dell'elettrone: tiene conto del fatto che l'elettrone non è totalmente libero (descrive quanto è stretta la parabola)

$$E = E_v - \frac{(\hbar k)^2}{2m_p^*}$$

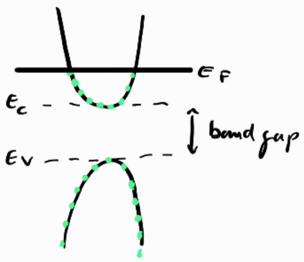
↳ massa eff. della lacuna



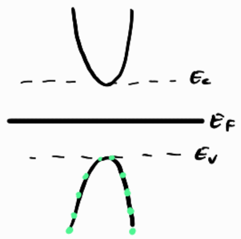
E_F (livello di fermi): è il più alto livello energetico pieno secondo la statistica di Fermi => mi dice fino a dove sono piene le bande

• tendenzialmente $m_n^* << m_p^*$

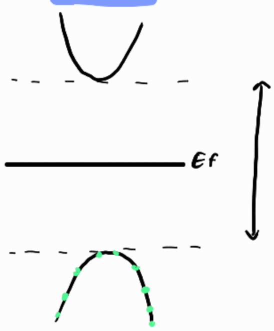
metallo



semiconduttore

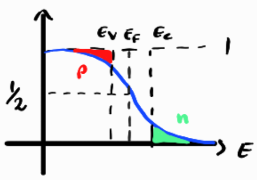


isolante



$(T = 0K)$

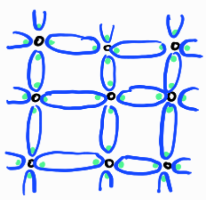
$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

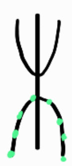


=> per $T \neq 0K$ all'equilibrio ho un po' di elettroni nella BC e delle lacune nella BV

=> $n = p = n_i = \sqrt{N_c \cdot N_v}\, e^{-\frac{E_{gap}}{2kT}}$

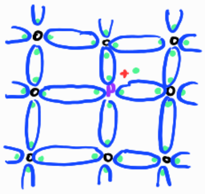
i-Si (silicio intrinseco)

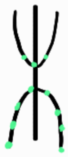




livelli associati ai legami covalenti

Si estrinseco

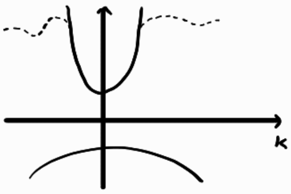




elettroni in eccesso occupano la banda di conduz.
(drogaggio con **donori**)

- l'interaz. Coulombiana tra + e • è debole ⇒ l'agitaz. termica a T ambiente è già suff. per liberare l'elettrone
- a temp. più basse • si lega all'atomo donore ⇒ freeze out (lo inizio ad osservare già a 100K)

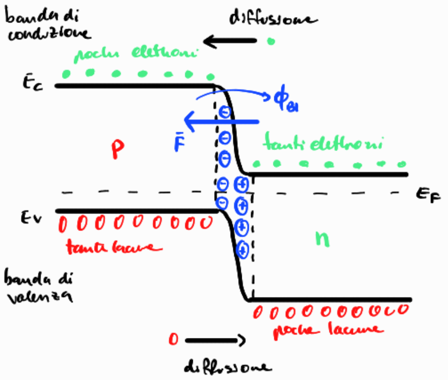
band gap diretto vs. indiretto



LED - light emitting diode

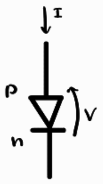
LED a giunzione

- giunzione con stesso semiconduttore



($V=\phi$; equilibrio)

- i portatori si diffondono (danno vita a una corrente di diffusione), lasciando scoperti gli atomi accettori/donori, creando la zona di carica spaziale che da vita a $\phi_{BI}/\bar{F}$ che si oppone al moto di diffusione (nasce una corrente di drift)
All'eq. J_{drift} e J_{diff} si bilanciano



$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \cdot e^{-\frac{E_G}{kT}} \quad \text{(silicio \underline{intrinseco})}$$

$$n = p = n_i$$

$\underline{p\text{-}Si}$ $\Rightarrow$ $p = N_v e^{-\frac{E_{F_p}-E_v}{kT}} \gg n$

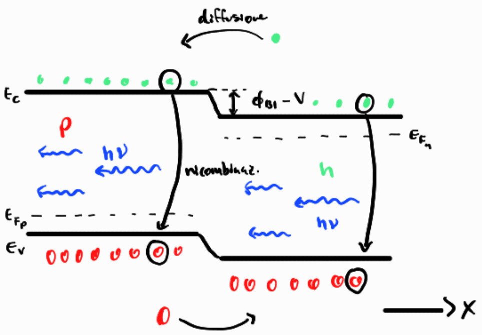
$p = N_A$ a T ambiente

$\underline{n\text{-}Si}$ $\Rightarrow$ $n = N_c e^{-\frac{E_c - E_{F_n}}{kT}} \gg p$

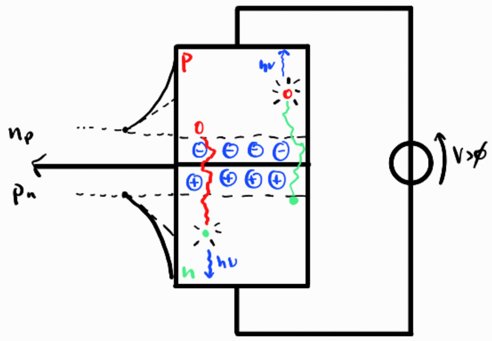
$n = N_D$

- applicando $V>\phi$, abbasso la barriera di potenziale permettendo agli elettroni e lacune di diffondersi

$h\nu \sim E_G$

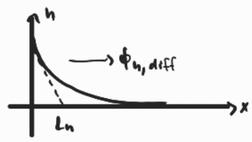


($V>\phi$; fuori equilibrio)



$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$

$\phi_{n,diff} = -D_n \nabla n$ legge di Fick



$D_n = \mu_n \frac{kT}{q}$ legge di Einstein

$[cm^2 s^{-1}]$ $[cm^2 s^{-1} eV^{-1}]$

μ_n: quanto velocemente l'elettrone risponde ad una applicaz. di un campo elettrico

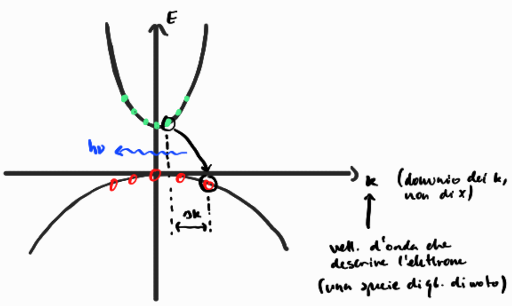
$$J_{n,drift} = q n \mu_n F$$

$\underline{GaAs}$: $E_G = 1{,}42\,eV$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E_g} \sim 1\,\mu m$$

il silicio $\underline{\text{non}}$ viene usato per i LED

band gap diretto



III	IV	V
B	C	N
Al	Si	P
Ga	Ge	As
In	Sn	Sb

GaP, InP

AlAs, GaSb, InSb

AlGaAs, AlGaPAs, InGaAs $\Rightarrow$ lavora 1550nm

si devono conservare:
- energia: $\overbrace{E_c + E_v}^{\text{prima della ricomb.}} = E_v + E_v + h\nu \Rightarrow h\nu = E_G = E_c - E_v$ (E_c: E_n, E_v: E_p)
- momento

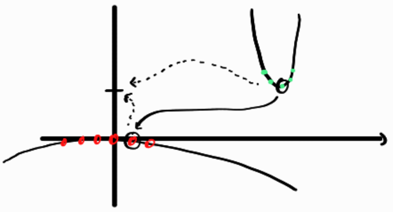
$k_{ph} = \frac{2\pi}{\lambda} \sim 10^7\,m^{-1}$ $\Rightarrow$ Δk nell'ordine di k_{ph} : mi basta l'interaz. lacuna, fotone, elettrone e si conserva sia la qt. di moto, che l'energia

λ: 600nm (nel visibile)

k_{banda} (estensione banda) $= \frac{2\pi}{a} \sim 10^{10}\,m^{-1}$

$a \sim$ Å

band gap indiretto (Si)



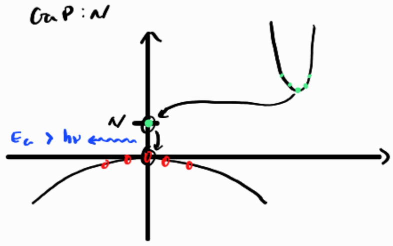
$\Delta k \gg k_{ph}$ => mi serve un'altra particella che bilanci la conservaz. della qt. di moto

↳ interaz. lacuna, fotone, elettrone, fonone => interaz. a 4 corpi è molto meno probabile

passo per uno stato intermedio: Shockley-Reid-Hall recombination => non radioattiva

per questo non uso Si, è a band gap indiretto

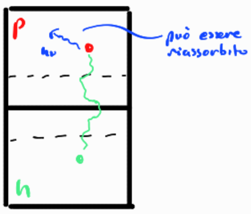
GaP : N



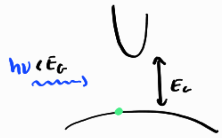
ricombinaz. mediante il livello energetico del drogante N

↳ ricombinaz. radioattiva

svantaggi del diodo a giunzione => riassorbimento

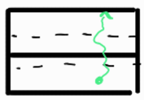


nel caso di GaP : N $h\nu < E_G$ => non posso avere riassorbimento perchè non ho energia suff. per fare il salto del gap



(nota: non da vita ad una emissione spontanea e non innesca un meccanismo laser perchè non ho inversione di popolaz.)

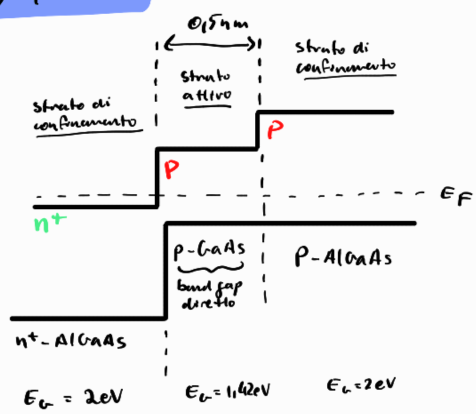
un altro modo che potrei pensare di usare per risolvere il problema del riassorbimento è fare un diodo corto



=> ma non devo farlo troppo corto! Rischierei che l'elettrone si diffonda e si ricombini al contatto ohmico, e che quindi non si ricombini con una lacuna

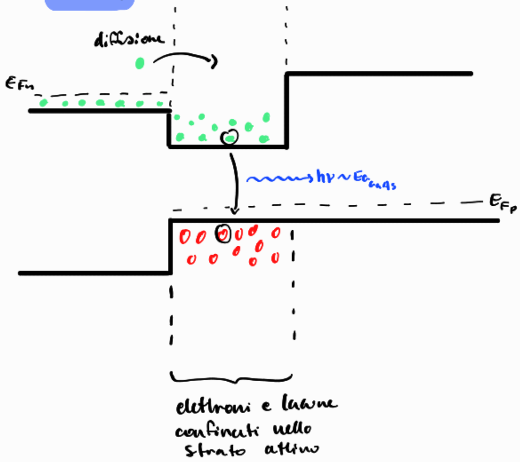
LED eterogiunzione

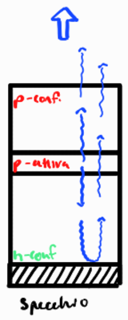
(V = ∅; equilibrio)



· caso degenere $E_F > E_C$, succede quando ho drogaggi molto alti (n^+)

$(V > \phi_{BI})$





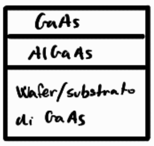
- localmente ho una alta concentraz. di lacune ed elettroni
  - ↳ rate di ricombinaz. ∝ concentraz. lacune × concentraz. elettroni

massimizzare il rate di ricombinaz. ⇔ confinare il più possibile i portatori
  - ↳ rendo lo strato attivo sottile

- inoltre inibisco il riassorbimento perché ho che $h\nu \sim E_{G_{GaAs}} \neq E_{G_{AlGaAs}}$

processo industriale per realizzare l'eterogiunzione:

<u>Molecular Beam Epitaxy</u>



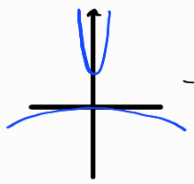
deposito strato per strato, e viene costruito come se fosse un monocristallo

(idealmente) non ha difetti

* <u>distribuz. stati</u> ⇒ $g(E)$ = densità di stati

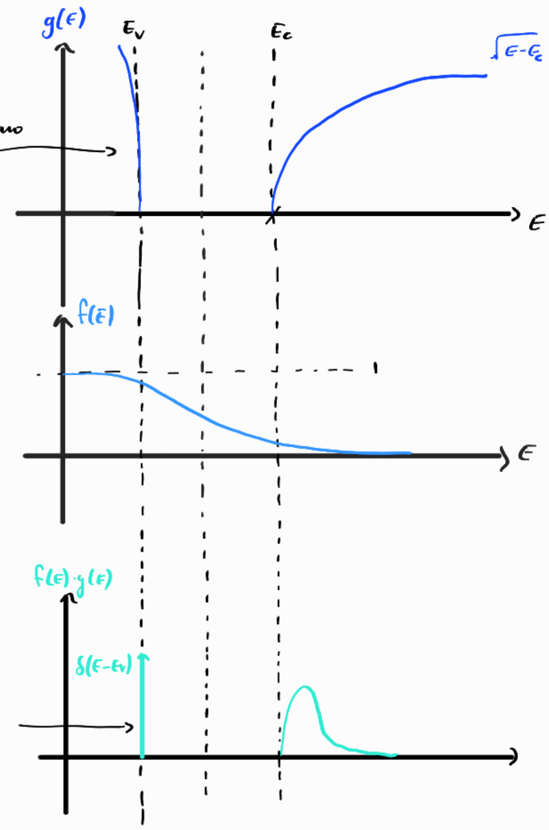
* <u>popolaz. stati</u> ⇒ $f(E)$ = distribuz. Fermi-Dirac

$$\begin{cases} n(E)\,dE = f(E)\,g_c(E)\,dE \\ p(E)\,dE = [1-f(E)]\,g_v(E)\,dE \end{cases}$$

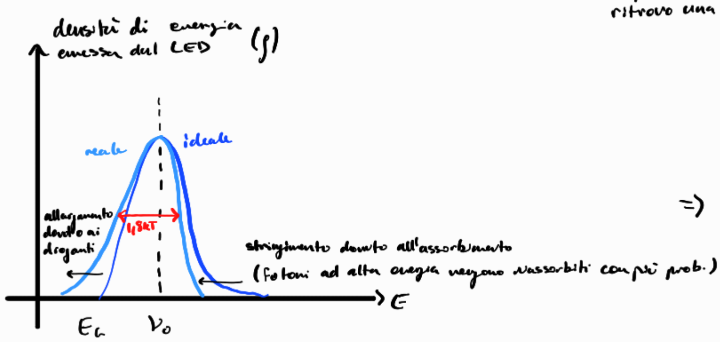


larghezza BV >> larghezza BC ⇒ approx. BV a un piano

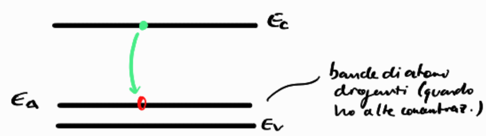
approx. a un piano



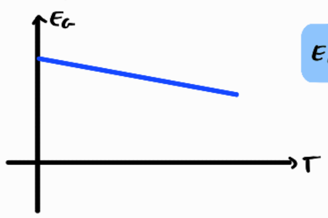
avendo approx. a un piano mi ritrovo una delta



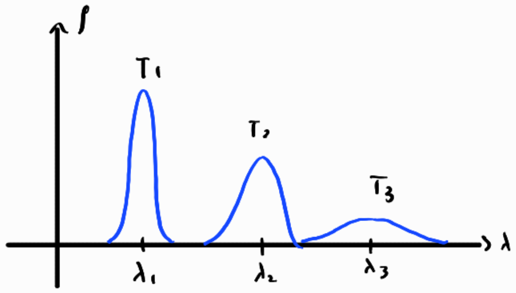
$$\Rightarrow \begin{cases} h\nu_0 = E_G + \frac{kT}{2} \\ h\Delta\nu = mkT \\ m \sim 3 \end{cases}$$



<u>band gap narrowing</u>

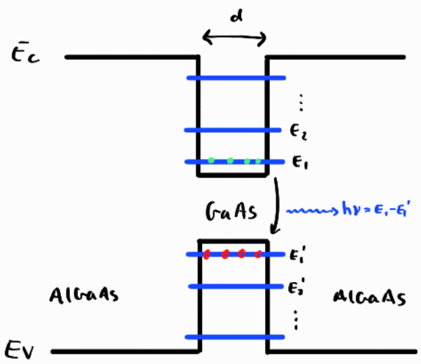


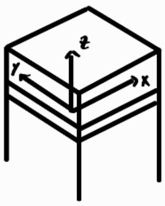
$$E_G(T) = E_{G_0} - \frac{AT^2}{T+B}$$ legge di Varshny



- E_g decresce $\Rightarrow$ $h\nu$ decresce $\Rightarrow$ λ aumenta
- allargamento perchè FWHM $\propto kT$

multiple quantum well





- la quantizzaz. degli stati mi vincola un grado di libertà (z)

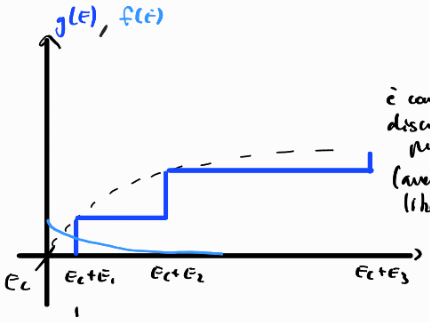
$$\Rightarrow \boxed{E_n = \underbrace{E_0}_{\substack{\text{energia}\\\text{banda di}\\\text{condut.}}} + \underbrace{\frac{h^2}{8md^2}\cdot n^2}_{\substack{\text{energia}\\\text{dell'n-esimo}\\\text{stato lungo z}}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_n^*}}_{\frac{p_x^2}{2m_n^*} = E_{kx}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_n^*}}_{\frac{p_y^2}{2m_n^*} = E_{ky}}}$$

energia dell'elettrone

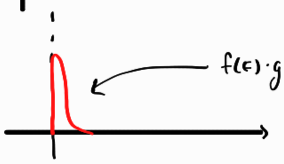
- variando d, cambio E_1 e E_1' e quindi posso variare la lunghezza d'onda d'emissione a piacere

analogamente:

$$\Rightarrow \boxed{E_p = E_v - \frac{h^2}{8md^2}\cdot n^2 - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_p^*} - \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_p^*}}$$



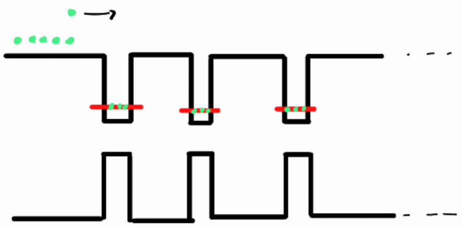
è come se avessi discretizzato la parabola (avendo 2 gradi di libertà, cambia la g(E))



$f(E)\cdot g(E)$ $\Rightarrow$ è molto migliorata ρ in uscita! (Ho un picco più stretto)

- un problema è il flooding del quantum well $\Rightarrow$ vengono popolati $E_1, E_2, \ldots,$
  - ↳ perdo l'emissione

una sol. è usare multipli quantum well: a parità di corrente / elettroni immessi, popolo più stati fondamentali senza popolare invece quelli alti



materiali per LED

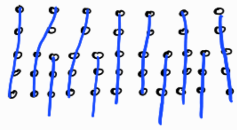
	III	IV	V
E_G ↑	B	C	N
	Al	Si	P
	Ga	Ge	As
	In	Sn	Sb

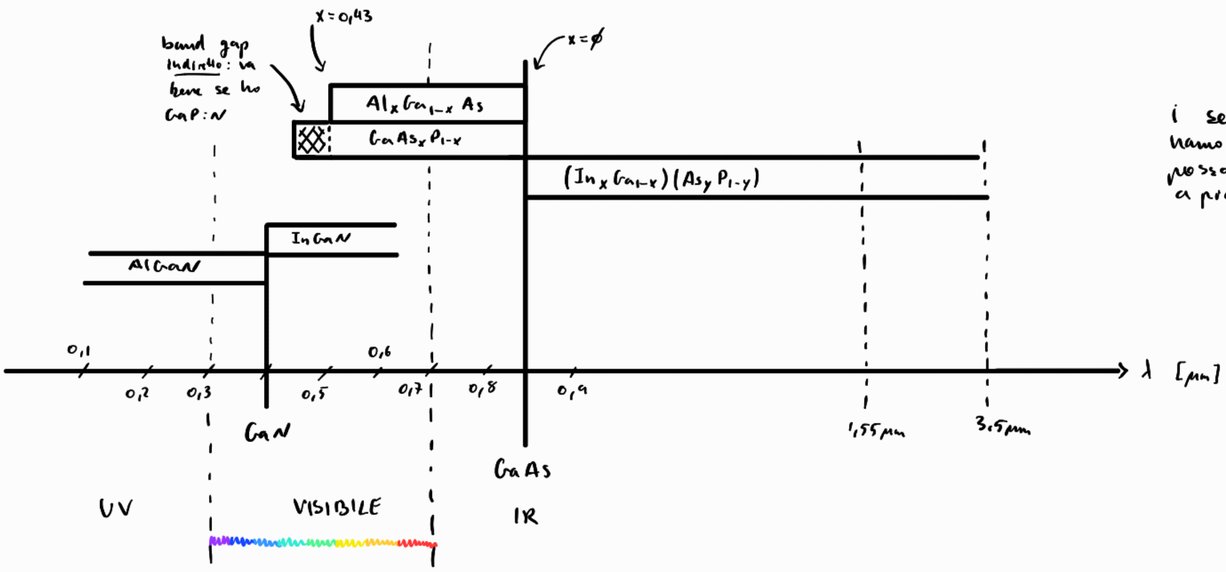
50% gruppo III } si devono alternare nella struttura
50% gruppo IV

$h\nu \sim E_G$ (E_G dipende dal materiale – parametro di progettaz.)

$E_G(GaAs) = 1{,}4\,eV$
$E_G(GaN) = 3{,}4\,eV$

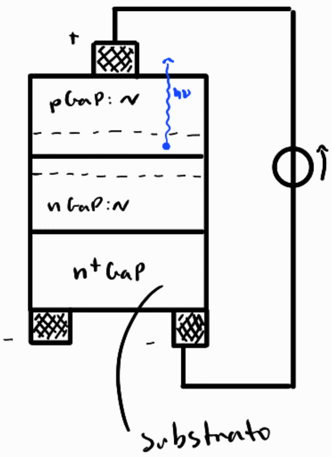
- a: passo reticolare, non più del 10% di diff. tra passi reticolari ⇒ lattice matching
- se non ho lattice matching, si creano difetti ⇒ dislocazione



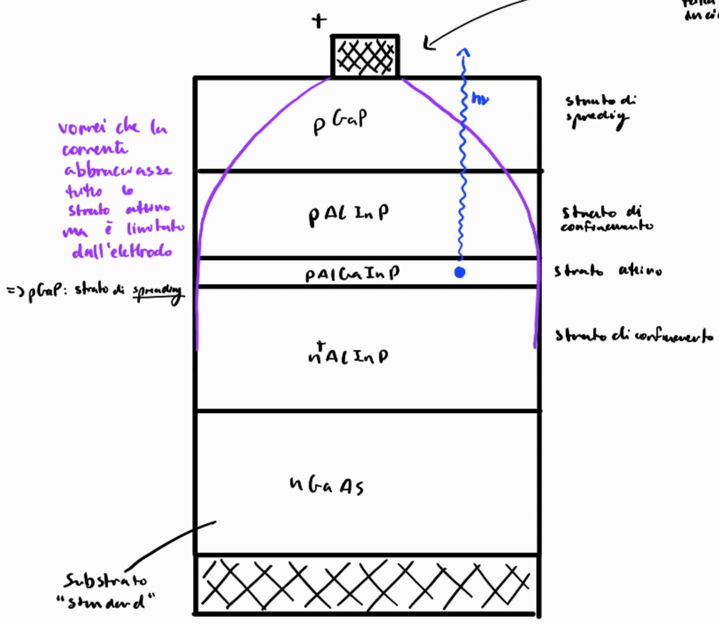


i semiconduttori III-V hanno questo vantaggio che posso modulare il colore a piacere

LED omogiunzione

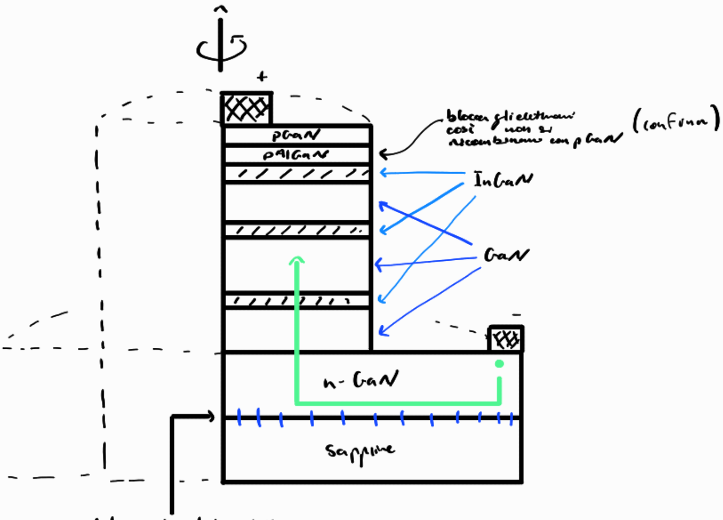


LED eterogiunzione

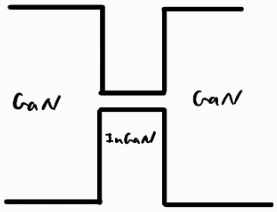


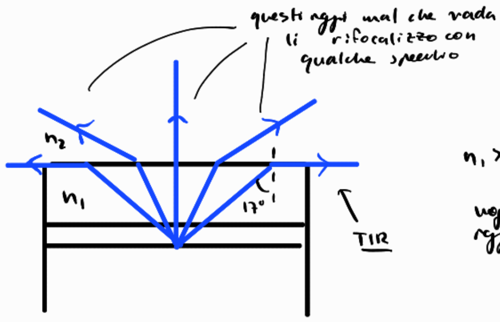
assorbe/blocca tutta la luce incidente ⇒ ho un trade-off: da un lato voglio minimizzare l'area per non bloccare la luce, ma non troppo perché sennò non limita la corrente

LED a multiplo quantum well



lattice mismatch ~ 12%
=> non è un problema perché man mano che cresco lo strato, più vado su meno risento dei difetti



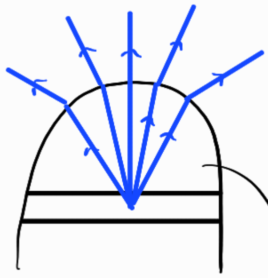


$n_1 > n_2$ => riflessione interna

voglio evitare TIR perché quei raggi poi sono "irrecuperabili"

si risolve con

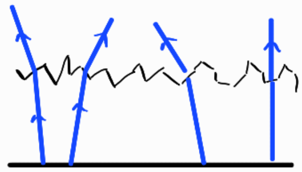
=>



dome shaped
=> evita la TIR

resina epossidica

V



superficie textured

efficienza (LED)

efficienza quantica interna

η_{IQE} conteggio la ricombinaz. radioattiva (anche se poi i fotoni emessi non riescono a contribuire al fascio emesso perché si ricombinano prima)

cost. di tempo caratteristica per la ricombinaz. radioattiva

$$\eta_{IQE} = \frac{1/\tau_r}{1/\tau_r + 1/\tau_{nr}}$$

non radioattiva

$$\Rightarrow \eta_{IQE} = \frac{1/\tau_r}{1/\tau_n}$$

← rate totale

potenza del fascio interno (non viene misurata)

$$\Rightarrow \eta_{IQE} = \frac{P_{int}/h\nu}{I/q}$$

corrente che fornisco

$$\frac{[J/s \cdot 1/J]}{[C/s \cdot 1/C]} = \frac{\text{n° fotoni}/\text{unità di tempo}}{\text{n° elettroni}/\text{unità di tempo}} = \frac{\text{n° fotoni}}{\text{n° elettroni}}$$

è un rapporto tra quanti

efficienza quantica esterna

$$\eta_{EQE} = \frac{P_{out}/h\nu}{I/q}$$

potenza in uscita (questa si che la misuro)

tiene conto della potenza che effettivamente fuoriesce

efficienza di estrazione:

$$\frac{\eta_{EQE}}{\eta_{IQE}} < 1$$

~ 30-40% per semicondutt. a band gap diretto

(~1% per band gap diretto)

power conversion efficiency

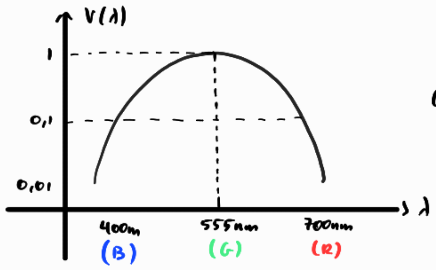
- conversione da potenza elettrica in ingresso a potenza ottica in uscita

$$\eta_{PCE} = \frac{P_{out}}{\underbrace{I \cdot V}_{P_{int}}} = \eta_{EQE} \cdot \frac{h\nu}{qV}$$

brillanza visiva:

misura della potenza rispetto quanto il nostro occhio percepisca la luce

$$\Phi_V = P_{out} \cdot \underset{[lm/W]}{683} \cdot V(\lambda) \quad [lm]$$



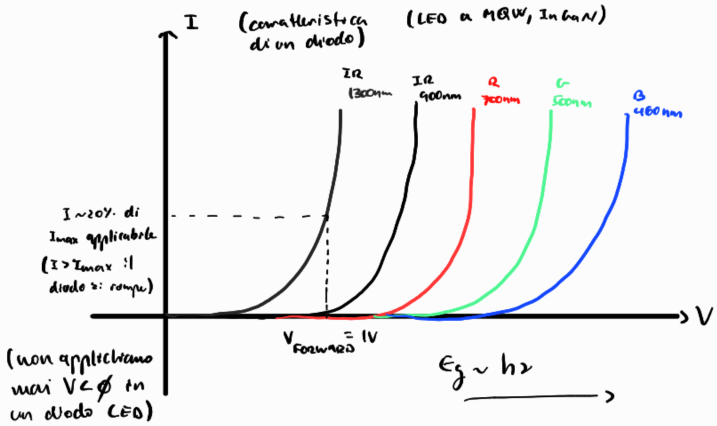
(il nostro occhio è più sensibile alla luce verde)

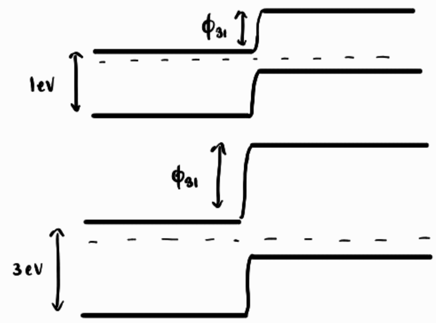
efficienza luminosa:

$$\eta_{LE} = \frac{\Phi_V}{\underbrace{I \cdot V}_{P_{int}}} \quad [lm/W]$$

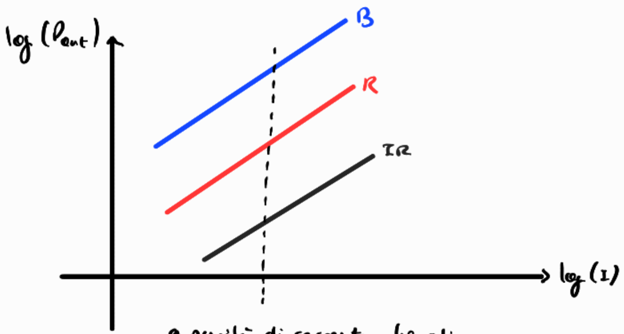
lampadina con filamento incandescente: 17 lm/W

LED: 100 lm/W





band gap più grandi implicano tensione di built in maggiori. Quindi per λ piccole, mi servirà una tensione di forward maggiore per avere 20% di I_{max}



a parità di corrente, ho gli stessi fotoni emessi, ma i fotoni del blu hanno maggiore energia (λ minore)

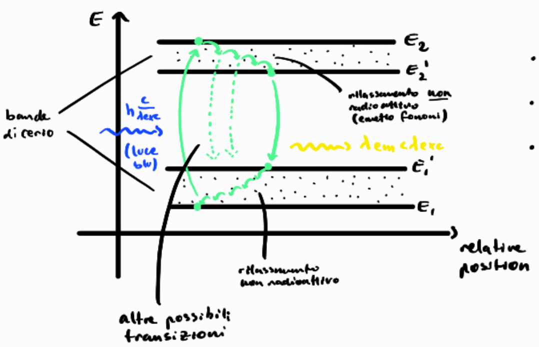
fotoluminescenza

fosfori: sono in grado di dar vita a un red shift

$\lambda_{excitement} \Rightarrow \lambda_{emessa}$ ($> \lambda_{exc}$)

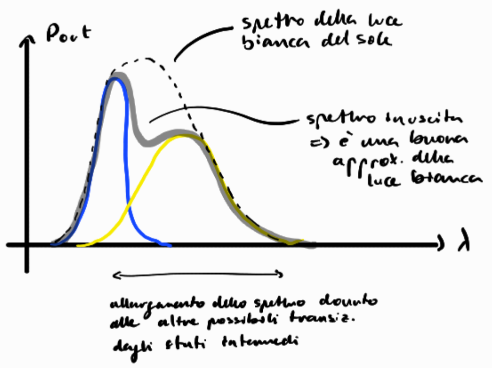
red shift di stokes

Ce^{3+}: YAG Yttrium Aluminum Garnet ($Y_3Al_5O_{12}$)



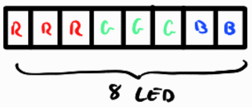
- c'è una "conversione" da luce blu a luce gialla
- λ_{exc} è risonante con ΔE (per questo si usa Ce^{3+}: YAG)
- non tutta la luce incidente viene convertita; la luce blu ha una certa prob. di essere assorbita. Quella che non viene assorbita/convertita viene riemessa come luce blu

=>



LED bianco

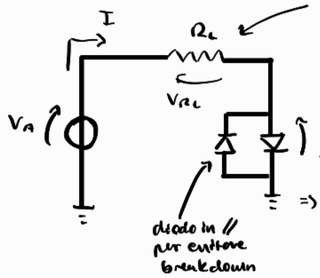
per fare un pixel (picture element):



256 tonalità di colori

Circuiti per LED

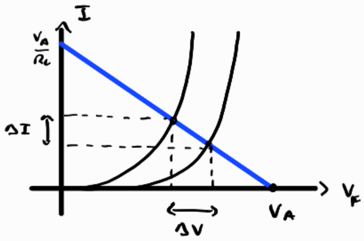
pilotaggio diretto in tensione:



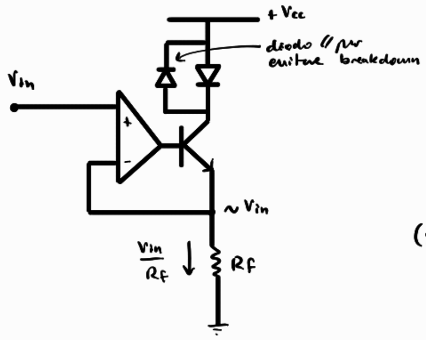
$V_F = V_A - I \cdot R_L$

$\Rightarrow I = \frac{V_A - V_F}{R_L}$

(se V_F scende oltre una certa soglia, il diodo in // viene polarizzato in diretta e fissa una tensione positiva ai capi del diodo LED)



circuito di polarizzaz. in corrente:

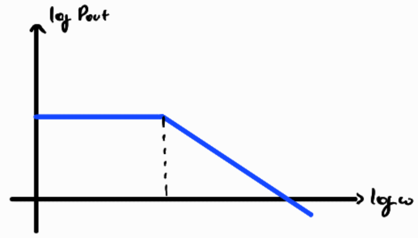


risposta in frequenza:

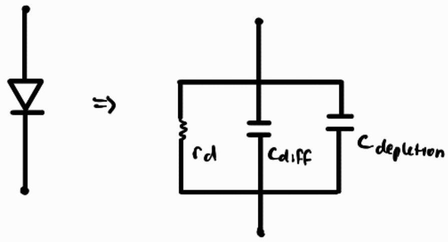
$$P_{out} = \frac{P_0}{\sqrt{1+(\omega \cdot \tau)^2}}$$

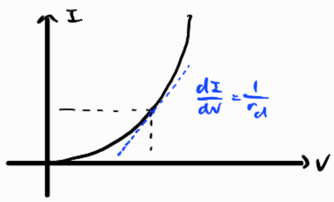
$(s = j\omega)$

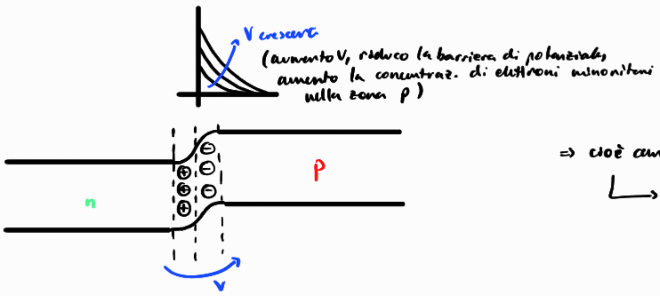
$$\left[\ |P_{out}| = \frac{|P_0|}{|(1+s\tau)|} = \frac{P_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\ \right]$$



- la costante di tempo/polo è dovuto alle capacità parassite del diodo LED







⇒ cioè cambio la tensione, cambia la carica

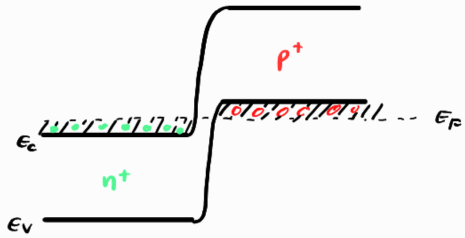
↳ effetto capacitivo (Cdepletion)

- Cdiff: capacità di diffusione dovuta al tempo di ricombinaz. dei minoritari iniettati nella lunghezza di diffusione

$C_{diff} \gg C_{dep} \Rightarrow \tau = r_d \cdot C_{diff}$ (coincide con τ_n)

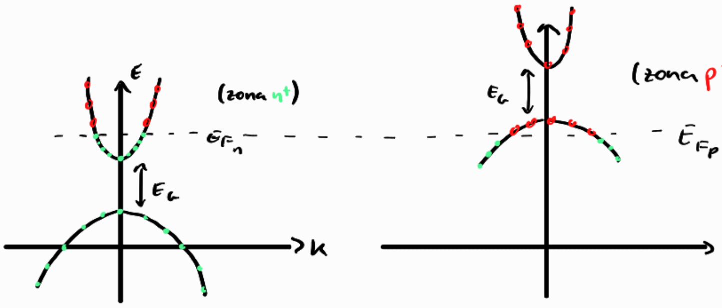
diodo laser

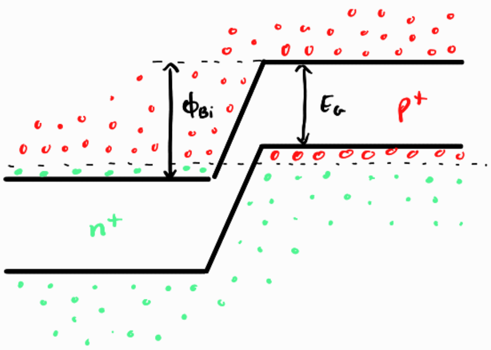
(omogiunzione)



- fondamentalmente è come un LED, ma con semiconduttori fortemente drogati

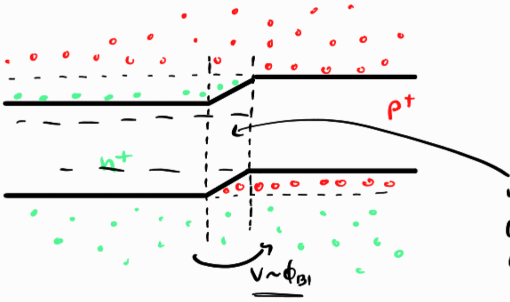
drogaggio degenere : $N_D, N_A > 10^{20}\,cm^{-3}$ ⇒ livello di Fermi entra in banda





($V=\phi$, equilibrio)

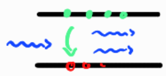
$\phi_{Bi} > E_G$

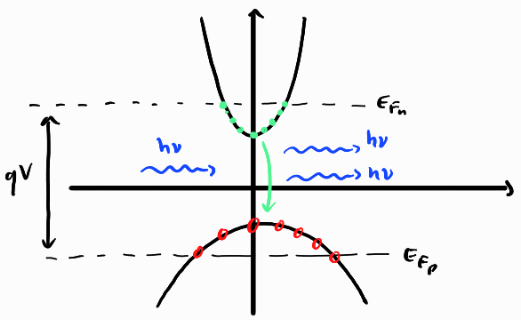


($V \sim \phi_{Bi} > E_G$, fuori equilibrio)

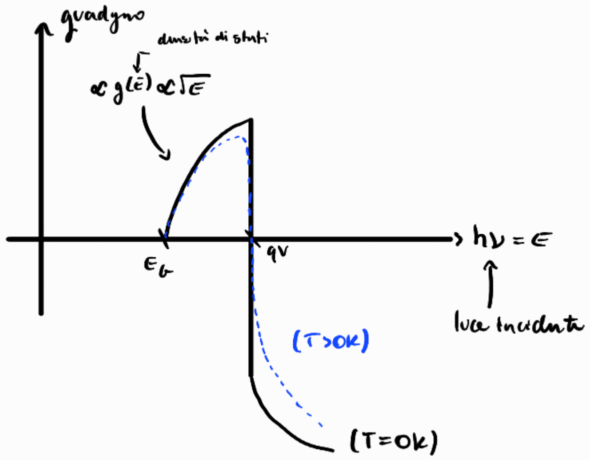
nella zona di carica svuotata ho inversione di popolazione!

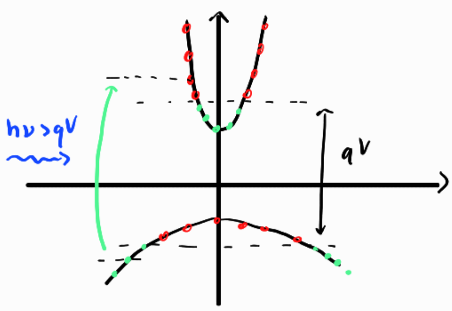
Cioè per effetto del forte doping (degenere) ci sono più elettroni in banda di conduzione che in banda di valenza (ho tanti elettroni a livelli energetici alti, come nei laser)



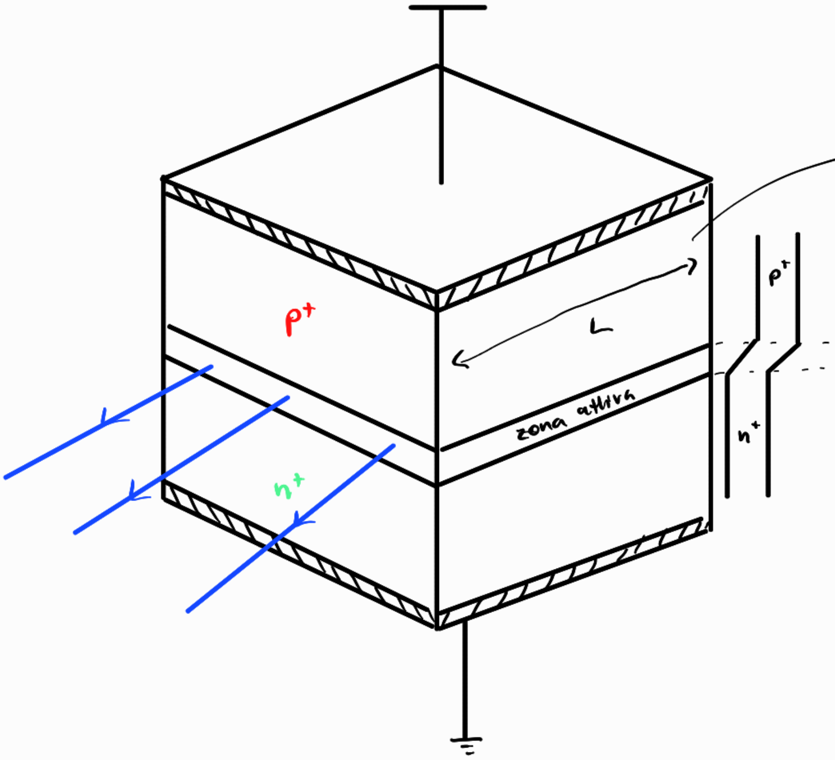


$qV = E_{F_n} - E_{F_p}$





se $h\nu > qV$ non posso avere emissione spontanea. Avrò che gli elettroni in banda di valenza assorbiranno per andare in banda di conduz.

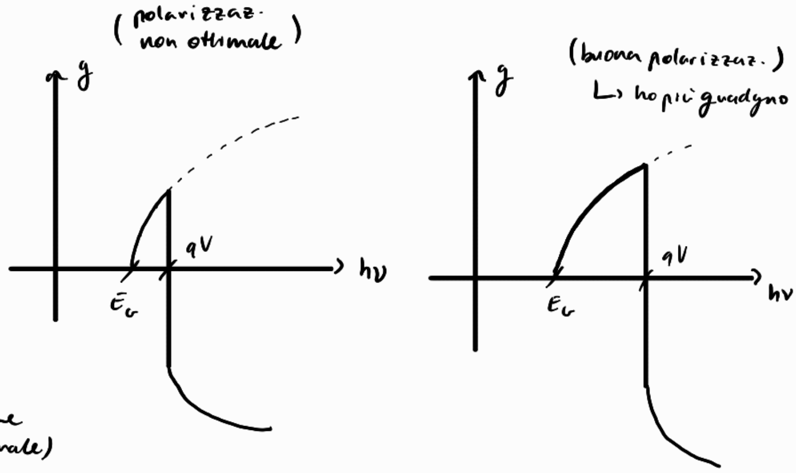


$L = m \frac{\lambda}{2n}$

$\nu_m = m \frac{c}{2Ln}$

diodo laser (requisiti):

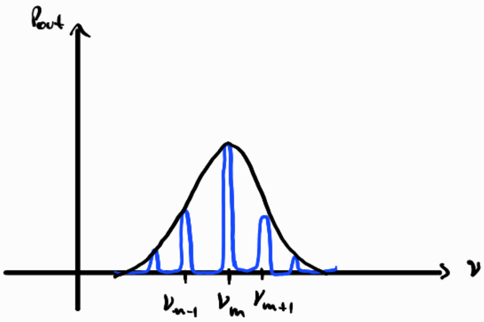
1) drogaggio forti
2) cavità
3) $qV > E_G$

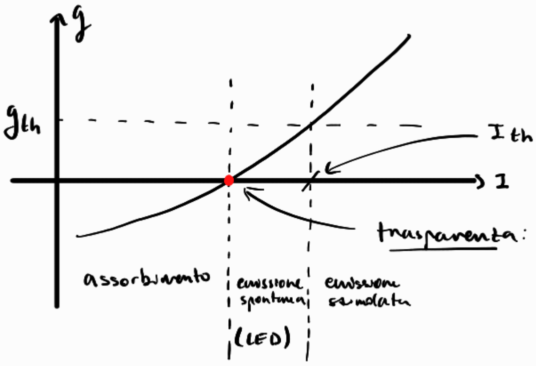


$$e^{2L(\underbrace{g}_{\text{guadagno}} - \underbrace{\alpha_s}_{\text{attenuaz.}})} \cdot R_1 \cdot R_2 = 1$$

(caso limite per avere pot. iniz. = pot. finale)

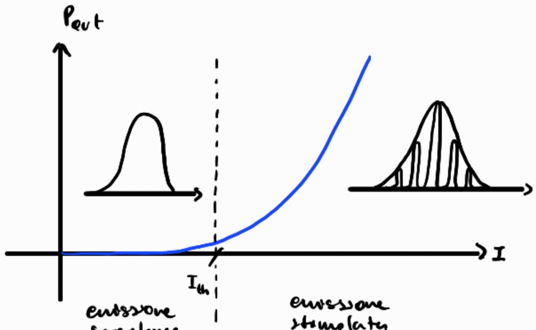
$$\Rightarrow g_{th} = \alpha_s - \frac{1}{2L} \log(R_1 \cdot R_2)$$





trasparenza: un fotone iniettato ha pari prob. di essere emesso o assorbito

$$g = \underbrace{N_2 \cdot \sigma_e}_{\text{emissione stimolata}} - \underbrace{N_1 \sigma_a}_{\text{assorbimento}}$$



↳ luce incoerente

(non dà vita a fenomeni di interferenza)

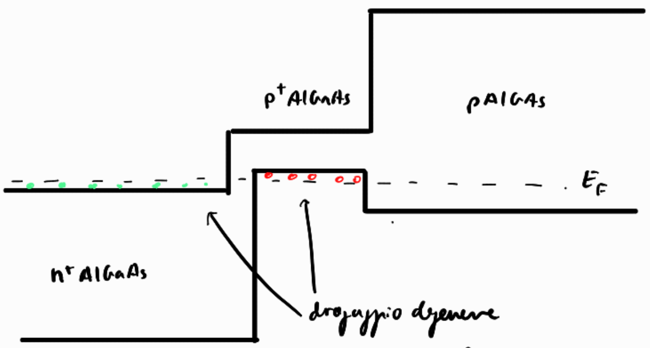
↳ coerente

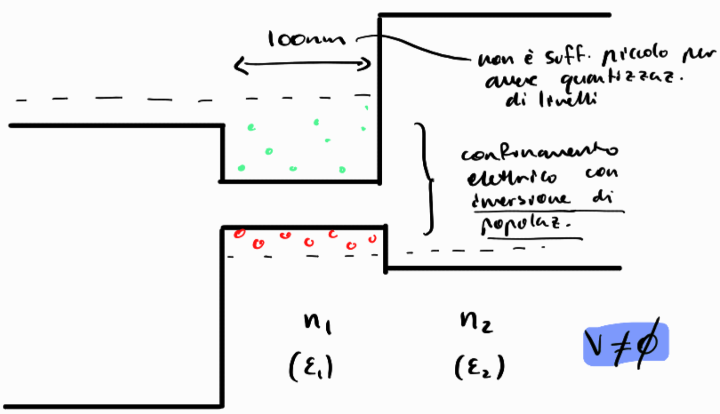
- ho vari problemi col diodo laser a omogiunzione

  * eccessiva I_{th}
  * vorrei riuscire ad avere un maggiore confinamento

diodo a eterogiunzione

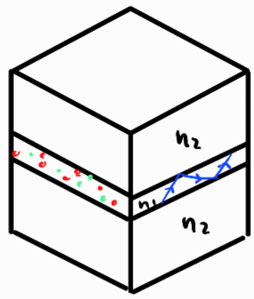
$(V = \emptyset)$





$V \neq \emptyset$

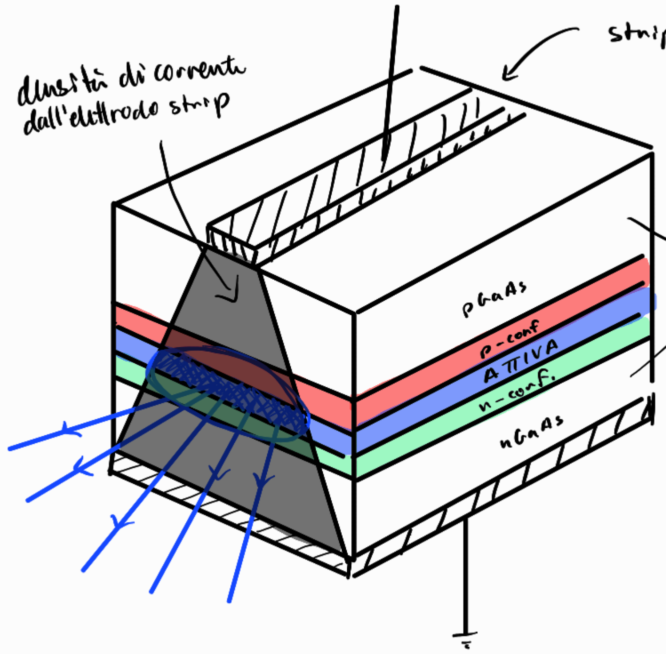
$n_1 > n_2 \Rightarrow$ si comporta anche da guida d'onda



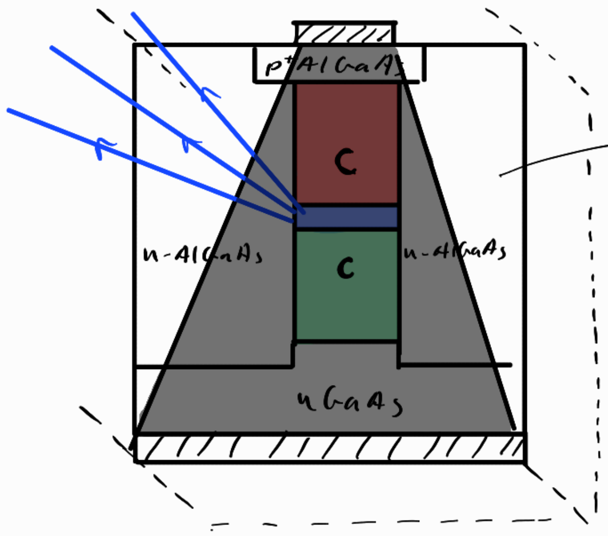
ho confinato:

* luce (fotoni)
* elettroni
* lacune

guida da guadagno

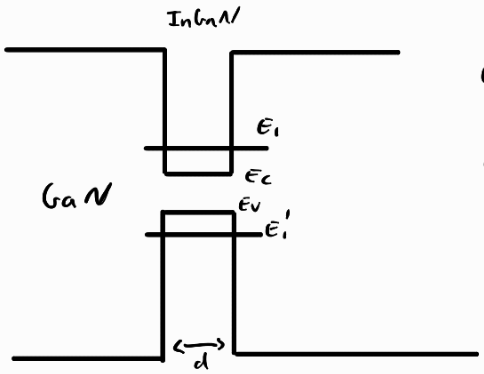


guida da indice



Confino con n-AlGaAs così confino anche lateralmente

diodo laser quantum well

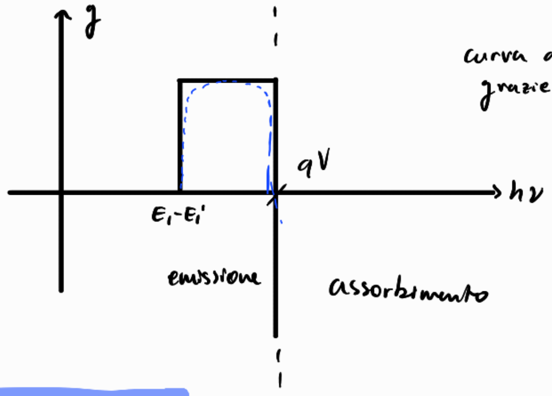


$$E_1 = \frac{h^2}{8m_n^* d^2} \cdot n^2 + E_c$$

$$E_1' = \frac{h^2}{8m_p^* d^2} \cdot n^2 + E_v$$

$d \sim 10nm$

ho maggiore confinamento



curva di guadagno migliore
grazie alla $g(E)$ a gradino

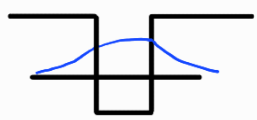
$\lambda_{bw} \sim 400nm$

$d \sim 10nm$

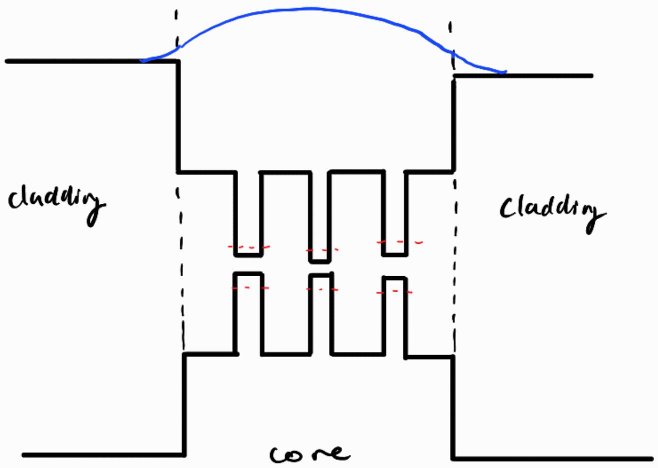
$\lambda \gg d$

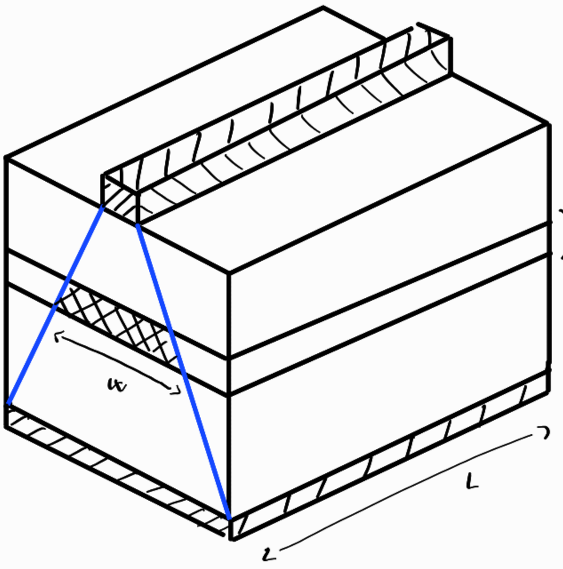
invado molto il cladding

↳ MQW



multiple quantum well (MQM)





$$\underbrace{\frac{I}{e\cdot d\cdot L\cdot w}}_{\text{densità di elettroni che ricombinano per unità di tempo}} = \underbrace{\frac{n}{\tau_r}}_{\text{emissione spontanea}} + \underbrace{K\,n\,N_{ph}}_{\text{emissione stimolata}} \quad (1)$$

corrente fornita: I; n° elettroni/s; N_{ph}: n° fotoni coerenti emessi

$\left[\frac{\text{n° elett.}}{\text{cm}^3\cdot s}\right]$ $\left[\frac{\text{n° fotoni}}{s}\right]$

τ elettrone che immetto che si ricombina, questa ricomb. darà vita a qualche tipo di emissione

emissione stimolata: $\underbrace{\frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}}_{\text{termine di perdita di fotoni per assorbimento}} = \underbrace{k\cdot n\cdot N_{ph}}_{\text{termine di generaz. di fotoni}} \Rightarrow n_{th} = \frac{1}{k\,\tau_{ph}}$ (2) concentraz. di elettroni allo stato stazionario

τ_{ph}: tempo di vita dei fotoni in cavità (cioè tempo medio di assorbimento)

all'equilibrio: assorbimento = emissione

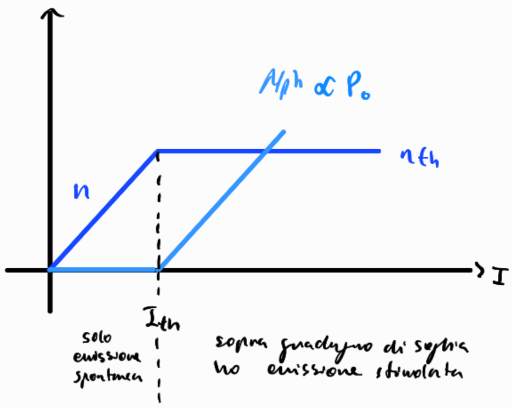
smaltimento nello spazio dei fotoni $\left\{\frac{dN_{ph}}{dx} = -\alpha_t N_{ph}\right.$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{\tau_{ph}\,\alpha_t} \Rightarrow \tau_{ph} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c\cdot\alpha_t}$$

lo vorrei massimizzare (aumento la lifetime)
↳ voglio avere le perdite α_t minime

$$\underbrace{\frac{dN_{ph}}{dt}}_{\text{smaltimento nel tempo}} = \frac{-N_{ph}}{\tau_{ph}}$$

(cost. di tempo di spegnimento del laser)



solo a soglia per $N_{ph} = \emptyset \Rightarrow I_{th} = \frac{n_{th}}{\tau_r}\cdot e\cdot d\cdot L\cdot w$ (3)

dalla (1) $\Rightarrow N_{ph} = \frac{I}{e\cdot d\cdot L\cdot w\cdot k\cdot n} - \frac{\cancel{n}}{\tau_r\cdot k\cdot \cancel{n}}$

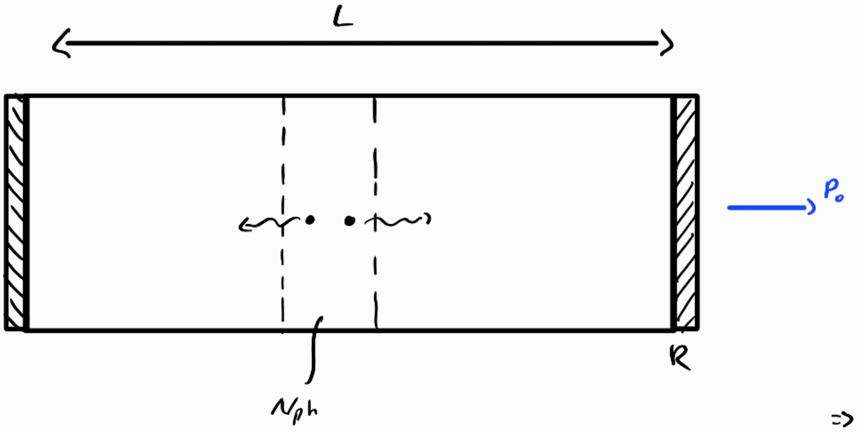
dalla (2) $\Rightarrow k = \frac{1}{n_{th}\cdot\tau_{ph}}$

↳ $N_{ph} = \underbrace{\frac{I}{e\cdot d\cdot L\cdot w}}_{\text{fotoni generati dalla corrente}}\cdot\tau_{ph} - \frac{n_{th}}{\tau_r}\cdot\tau_{ph}$

dalla (3) $\Rightarrow \frac{n_{th}}{\tau_r} = \frac{I_{th}}{e\cdot d\cdot L\cdot w} \Rightarrow N_{ph} = \frac{I}{e\cdot d\cdot L\cdot w}\cdot\tau_{ph} - \frac{I_{th}}{e\cdot d\cdot L\cdot w}\cdot\tau_{ph} = (I - I_{th})\frac{\tau_{ph}}{e\cdot d\cdot L\cdot w}$

(valida soprasoglia, non ha senso per $I < I_{th}$)

$$\Rightarrow \boxed{N_{ph} = (I - I_{th})\frac{\tau_{ph}}{e\cdot d\cdot L\cdot w}}$$

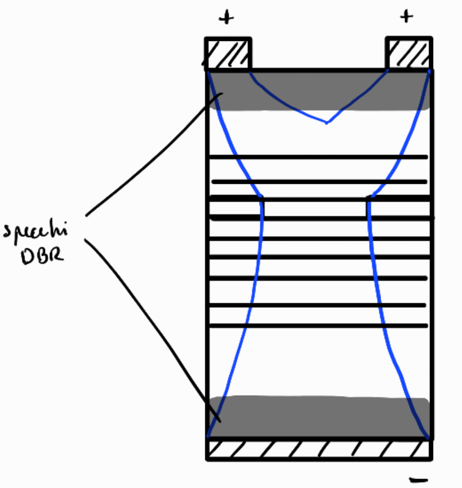


$$P_o = \frac{1}{2} \underbrace{N_{ph} \cdot d \cdot L \cdot W \cdot h\nu}_{\text{flusso fotoni}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{L}{c/\sqrt{\varepsilon_r}}}_{\text{tempo per uscire dal volume}}} \cdot (1-R)$$

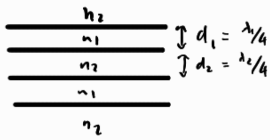
$$\Rightarrow P_o = \underbrace{(I-I_{th}) \cdot \frac{\tau_{ph}}{e \cdot d \cdot L \cdot W}}_{N_{ph}} \cdot \frac{d \cdot W \cdot h \cdot c^2 (1-R)}{2\sqrt{\varepsilon_r}\,\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{ottica} = (I-I_{th}) \cdot \frac{\tau_{ph} \cdot h \cdot c^2 (1-R)}{2eL \cdot n\lambda}}$$

VCSEL - Vertical Cavity Surface Emitting Laser



$L \sim 10\mu m$ (rispetto 1mm per laser orizzontali)

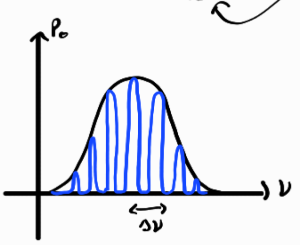


proprietà:

1) L piccolo $\Rightarrow \alpha_t$ alta $\quad \alpha_t = \alpha_s + \frac{1}{2L}\log\frac{1}{R_1 \cdot R_2}$

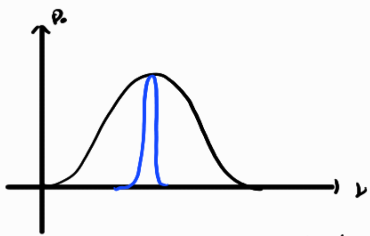
si compensa aumentando R_1 e R_2 (uso DBR)

2) $FSR = \Delta\nu_{FSR} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{2L}$ piccolo per il VCSEL



(laser orizzontale)

vs.

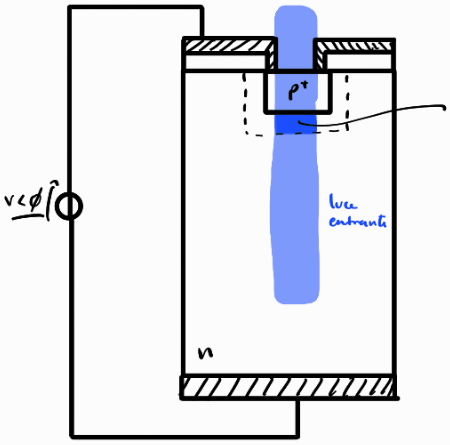


potenza più concentrata in uscita

fotodiodo

luce ⟵ elettroni — laser

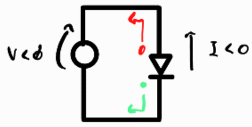
luce ⟶ elettroni — fotodiodo

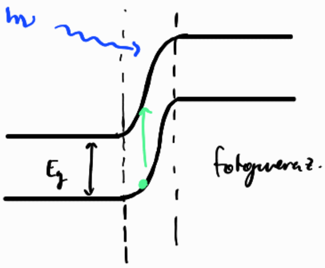


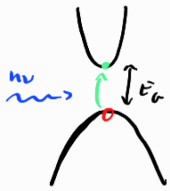
zona attiva solo qui (svantaggio)

⇓

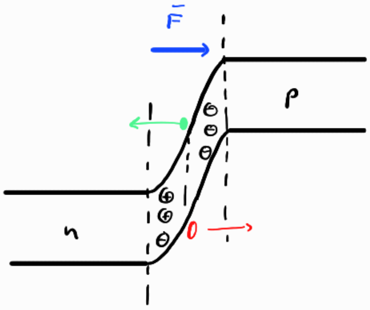
poco efficiente, si usa il fotodiodo p-i-n

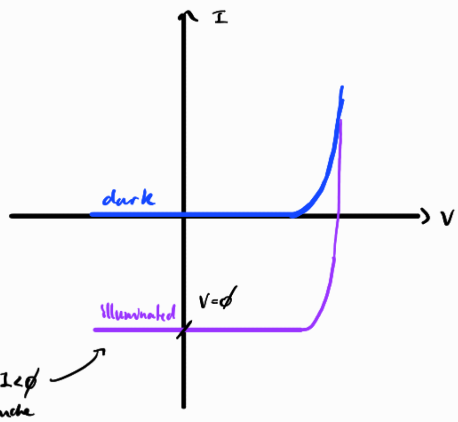






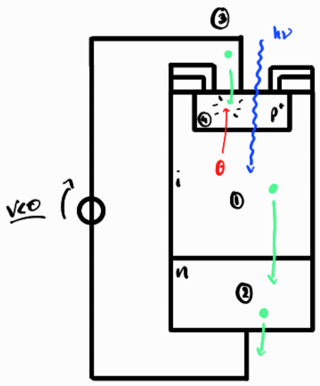
$$h\nu \geq E_G \Rightarrow \lambda \leq \frac{hc}{E_G} = \frac{1{,}24\,\mu m}{E_G}$$





corrente $I<0$ ($I\neq 0$) anche sottosoglia

fotodiodo p-i-n



① transito per <u>drift</u> (a seguito di una generaz. dovuta a hν incidente)

② per mantenere la neutralità viene espulso un elettrone nel circuito

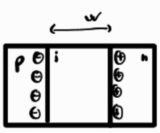
③ conduttore/filo per lo stesso motivo espelle un elettrone

④ elettrone + lacuna ⇒ carica neutra (non necessariamente c'è ricombinaz.)

posso fare la zona i grande a piacere ⇒ aumento la zona attiva

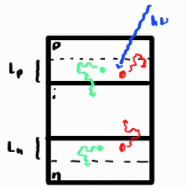
per un diodo p-n: $C = \frac{\varepsilon}{W} A$ ⇒ C grande ⇒ fotodiodo lento

piccolo



per un p-i-n W è grande invece

se la luce viene assorbita in zona neutra:

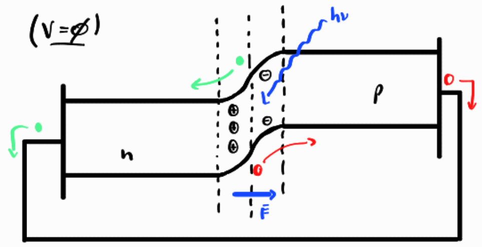


se avviene entro una distanza L_n, sparabilmente l'elettrone finisce in zona svuotata e si ripete il processo descritto precedentemente

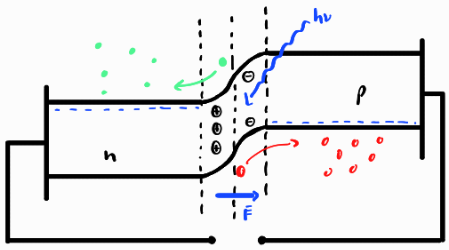
(nelle zone neutre il moto è per diffusione)

processo fotovoltaico

$(V = \emptyset)$

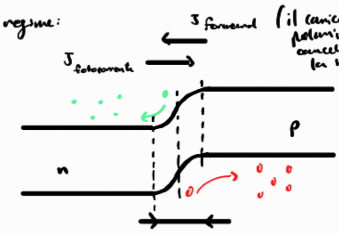


a circuito aperto:
$(I = \emptyset)$



carico + la zona p e - la zona n
↳ si instaura una d.d.p.

a regime:



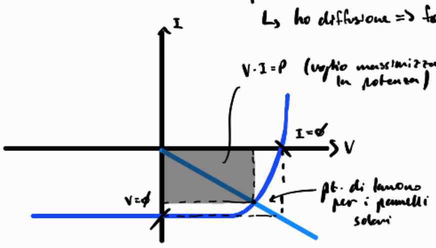
(il caricamento delle zone è come se stessi polarizzando in diretta - gli elettroni cancellano ⊕ e lacune ⊖, e si abbassa la barriera)

$\Rightarrow J_{tot} = J_{forward} + J_{ph} = \emptyset$ (a regime, in c.a.)

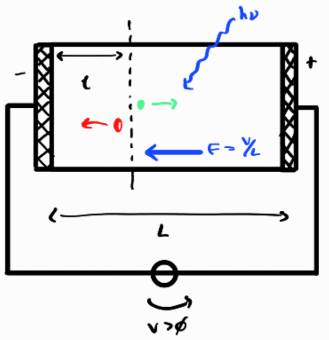
si stringe ⇒ riduco la barriera di potenziale

↳ ho diffusione ⇒ fotocorrente

$V \cdot I = P$ (voglio massimizzare la potenza) ⇒ massimizzo il filling factor: $\boxed{\dfrac{|V \cdot I|}{|V_{c.c.} \cdot I_{c.a.}|}}$



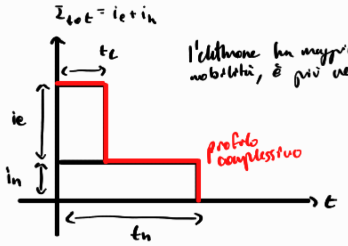
teo. Shockley-Ramo



tempi di transito: $\begin{cases} t_e = \dfrac{L-l}{v_e} \\ t_h = \dfrac{l}{v_h} \end{cases}$

conservaz. energia: $\underbrace{qF\,dx}_{\text{lavoro compiuto dal campo}} = \underbrace{V\cdot i_e\,dt}_{\text{potenza (considerando la corrente degli elettroni)}}$

$\Rightarrow q\frac{\cancel{V}}{L}dx = \cancel{V}\cdot i_e\cdot dt \Rightarrow i_e = q\cdot\frac{1}{L}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow i_e = \frac{qv_e}{L}$ e analogamente $i_h = \frac{qv_h}{L}$



l'elettrone ha maggiore mobilità, è più veloce

$$\int I\,dt = i_e\cdot t_e + i_h t_h = \frac{qv_e}{L}\cdot\frac{L-l}{v_e} + \frac{qv_h}{L}\cdot\frac{l}{v_h} = q$$

cioè ho due cariche che si spostano, ma in questo transitorio vedo una sola carica

moto è equivalente a quello di un singolo elettrone

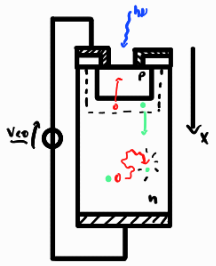
$\Rightarrow$ 1 fotone $\longrightarrow$ 1 elettrone

$\eta = \dfrac{I_{ph}/q}{P_o/h\nu} \leq 1$ efficienza quantica

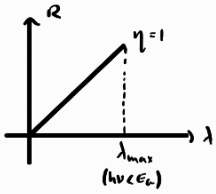
($P_o/h\nu$: flusso di fotoni incidenti)

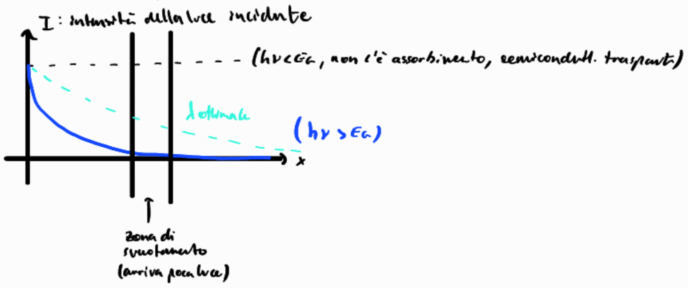
$R = \dfrac{I_{ph}}{P_o} = \eta \dfrac{q}{h\nu} = \eta \dfrac{q}{hc} \lambda \propto \lambda$

(R: responsività)

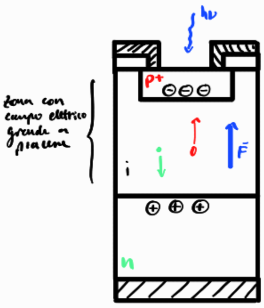


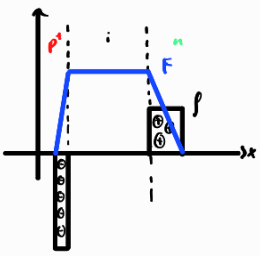
In generale deve avvenire nella zona con un campo elettrico (zona di svuotamento)

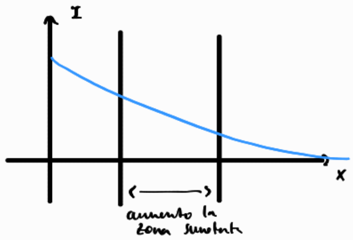


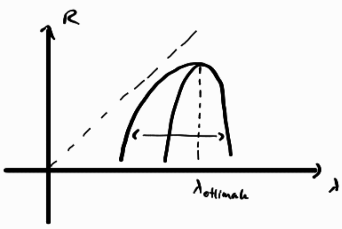


fotodiodo p-i-n









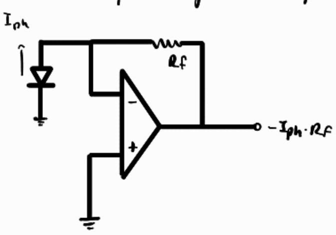
$C_d = \dfrac{\varepsilon \cdot S}{W_i}$ capacità minore => risposta più veloce

$W_i \sim 10 \mu m$

lo pago però con un tempo di transito maggiore dei portatori

$v_{sat} \sim 10^7 \, cm/s$ => $t_d = \dfrac{W_i}{v_{sat}} \sim 100 ps$ tempo limitante nella risposta

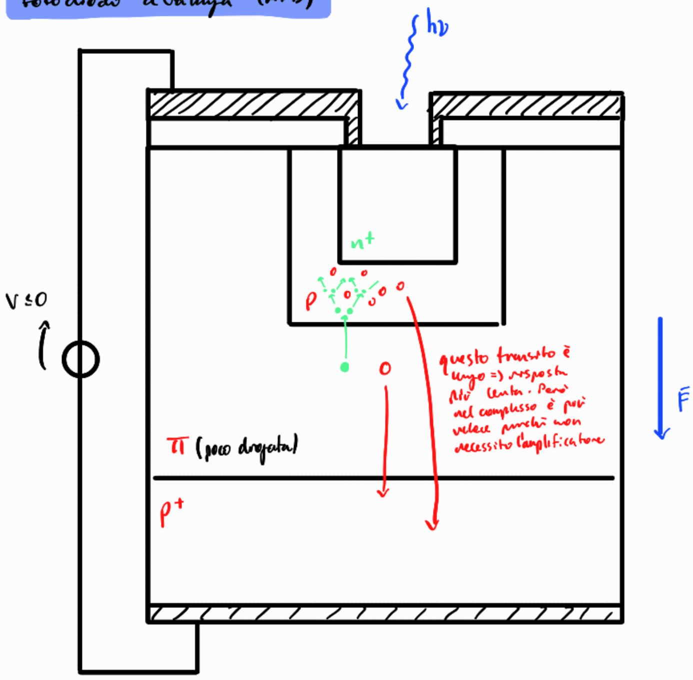
c'è però bisogno di amplificare la fotocorrente ($\eta \leq 1$)

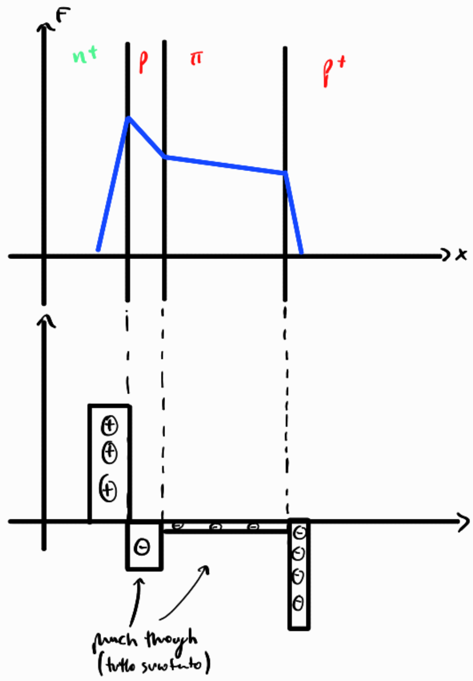


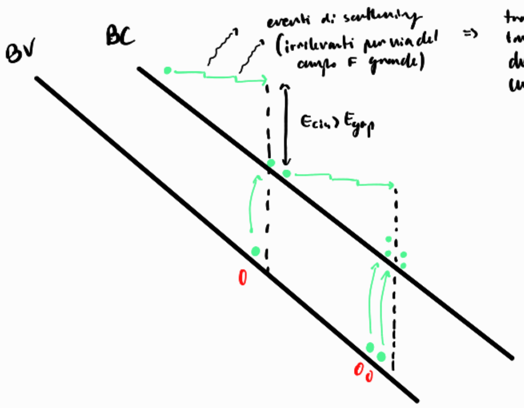
la banda del circuito amplificante limita la risposta

se non voglio usare un circuito a transimpedenza mi servirà un'efficienza >> 1

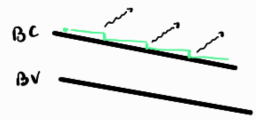
Fotodiodo a valanga (APD)







⇒ traiettoria quasi-balistica (senza urti) e impatta un elettrone in banda di valenza che viene portato in BC (così genero anche una lacuna in BV)

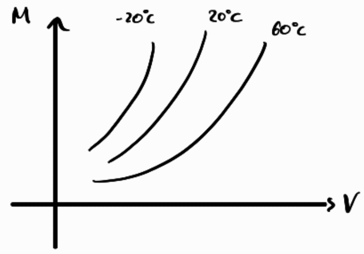


caso F piccolo

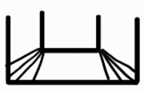
alla fine questi elettroni finiscono in zona n^+ e vengono raccolti, stessa cosa per le lacune che finiscono in zona p^+

fattore di moltiplicazione: $\boxed{M = \frac{I_{ph}}{I_{ph,0}}}$ ← fotocorrente generata / in assenza di valanga

$$\boxed{M = \frac{1}{1-\left(\frac{V}{V_{BD}}\right)^m}}$$ ← fattore caratteristico di best fit

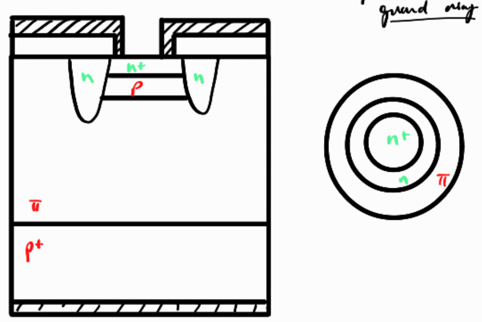


per T maggiori, più rilascio di fononi ho, è quindi meglio lavorare a bassa temp.

problema: 

sugli spigoli ho campi molto intensi ⇒ rischio breakdown

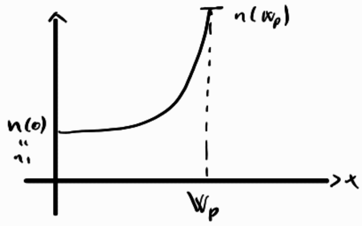
↳ per risolvere questo problema si usa un guard ring



$dn = n \cdot \alpha_e \cdot dx$ $\Rightarrow$ $n(x) = n(0)\, e^{\alpha_e x}$

aumento della concentraz. di e in dx

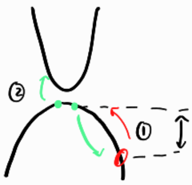
coeff. di ionizzaz. a impatto elettronico (è una probabilità di ionizzaz. per unità di lunghezza)



$\Rightarrow$ $n_2 = n_1 e^{\alpha_e W_p}$ $\Rightarrow$ $\frac{n_2}{n_1} = \boxed{M = e^{\alpha_e W_p}}$

$\boxed{\alpha_e = A e^{-\frac{B}{F}}}$

Inoltre $\exists$ anche un α_h (possono dare vita anche le lacune a valanga)



① lacuna ad "alto" (bassa energia)

② energia in eccesso ceduta all'elettrone a fianco

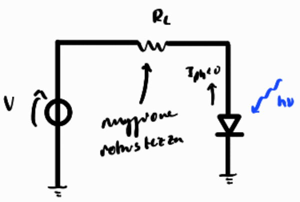
α_h è abb. trascurabile nel silicio

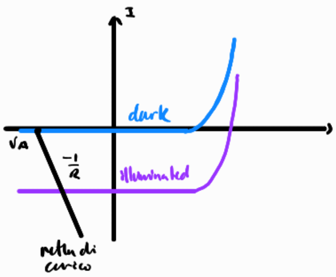
$\boxed{k = \frac{\alpha_h}{\alpha_e}}$

$\boxed{M = \frac{1-k}{e^{-(1-k)\alpha_e W} - k}}$ $\xrightarrow{k \to 0} e^{\alpha_e W}$; $\xrightarrow{k \to +\infty} 1$

$k\alpha_e = \alpha_h$ ($k \to \infty$, $\alpha_e \to 0$, α_h deve essere finito)

quindi l'exp. al denom. per $k \to \infty$ $\not\to \infty$ perchè $\alpha_e \to \emptyset$

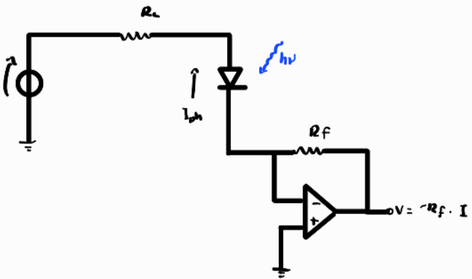




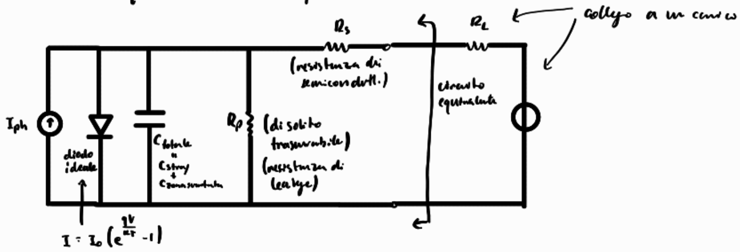
$V = V_A - R_L \cdot I$

$I = -\frac{1}{R} V + \frac{V_A}{R_L}$

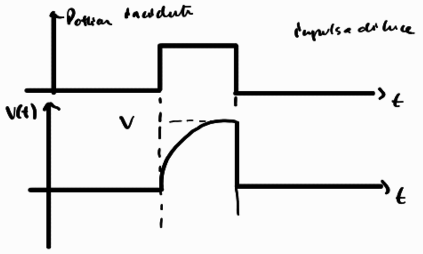
si deve poi amplificare:



circuito equivalente in frequenza



$\tau_{RC} = C_T \cdot (R_s + R_L) \sim 10ns$



$$\tau \begin{cases} \tau_{RC} \\ \tau_{transito} \end{cases}$$

una delle due sarà limitante