Politecnico di Milano

Segnali per le Telecomunicazioni

2014

Formulario

816820 Federico Badini
817615 Stefano Bodini

Prof.
Claudio Prati

June 10, 2014

Segnali a energia e potenza finita

Tempo continuo

Energia (1.1) $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(T)|\, dt$

Potenza(segnale non period.) (1.2) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2\, dt$

Potenza(segnale period.) (1.3) $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt$

Tempo discreto

Energia (1.4) $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$

Potenza(segnale non period.) (1.5) $P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$

Potenza(segnale period.) (1.6) $P = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x_n|^2$

Proprieta' dell'impulso discreto

Impulso centrato nell'origine

(1.15) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n d_n = x_0$

(1.14) $x_n d_n = x_0 d_n$

Impulso traslato

(1.16) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n d_{n-n_0} = x_{n_0}$

(1.17) $x_n d_{n-n_0} = x_{n_0} d_{n-n_0}$

Scomposizione sequenze

Una qualsiasi sequenza puo' essere scritta come somma di impulsi discreti traslati e pesati (1.18) $x_n = \sum_{m\to\infty}^{\infty} x_m d_{n-m}$

Un generico segnale puo' essere rappresentato come somma integrale di impulsi ritardati e pesati (1.28) $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$

Prodotto segnale-impulso

Impulso centrato nell'origine (1.24) $x(t)\cdot\delta(t) = x(t)\cdot \lim_{T\to 0}\frac{1}{T} rect\left(\frac{t}{T}\right) =$

$= \lim_{T\to 0} x(0)\frac{1}{T} rect\left(\frac{t}{T}\right) = x(0)\cdot\delta(t)$

Impulso traslato (1.27) $x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

Proprieta' di scalatura

Per impulsi (1.40) $\delta(at) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T} rect\left(\frac{at}{T}\right) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Sistemi lineari tempo invarianti

Uscita per sistemi discreti

Come conseguenza dell'equazione (1.18)

(2.3) $$y_n = \Gamma[x_n] = \Gamma\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k}\right] = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \Gamma[\delta_{n-k}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}$$

In forma compatta

(2.4) $$y_n = x_n * h_n$$

Uscita per sistemi continui

Come conseguenza dell'equazione (1.28)

(2.6) $$y(t) = \Gamma[x(t)] = \\ = \Gamma\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau\right] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\Gamma[\delta(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

In forma compatta

(2.7) $$y(t) = x(t) * h(t)$$

Proprieta' dell'operatore convoluzione

Sia per segnali continui che per segnali discreti

Commutativa $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

Distributiva $\big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t)$

Associativa $\big(x(t) * y(t)\big) * z(t) = x(t) * \big(y(t) * z(t)\big)$

Convoluzione con impulsi

Tempo continuo (da par 2.3 pag 38) $y(t) = x(t) * A\delta(t-t_0) = Ax(t-t_0)$

Tempo discreto (da par 2.3 pag 38) $y_n = x_n * A\delta_{n-n_0} = Ax_{n-n_0}$

Trasformata di Fourier

Tempo continuo

Trasformata

(3.3) $$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft} dt$$

Antitrasformata

(3.5) $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

Tempo discreto

Trasformata

(3.22) $$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi fnT}$$

Antitrasformata

(3.23) $$x_n = T\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(f) e^{j2\pi tnT} df$$

Trasformata normalizzata

(3.24) $$X(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi\phi n}$$

Antitrasformata normalizzata

(3.25) $$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(\phi) e^{j2\pi\phi n} d\phi$$

Proprieta' delle trasformate (tempo continuo)

Par.	*Proprieta'*	*Tempo*	*Frequenza*
(3.3.1)	Linearita'	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
(3.3.2)	Complesso coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
	Simmetria	Se $x(t)$ e' reale	$X(-f) = X^*(f)$ $Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\}$ $Im\{X(f)\} = -Im\{X(-f)\}$ $\|X(f)\| = \|X(-f)\|$ $\angle X(f) = \angle X(-f)$
		se $x(t)$ e' reale e pari	$X(f)$ e' reale e pari
		se $x(t)$ e' reale e dispari	$X(f)$ e' immaginaria e dispari
(3.3.3)	Scalatura	$x(at)$ con a reale	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{f}{a})$
(3.3.4)	Valori nell'origine	$x(0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)df$
		$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$	$X(0)$
(3.3.5)	Dualita'	$x(t)$ $X(t)$	$X(f)$ $x(-f)$
(3.3.6)	Traslazione	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
		$x(t)e^{+j2\pi f_0 t}$	$x(f - f_0)$
(3.3.7)	Convoluzione	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
(3.3.8)	Modulazione	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
(3.3.9)	Derivazione	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
(3.3.10)	Integrazione	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
(3.3.11)	Relazione di Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \|X(f)\|^2 df$
	Funzione di autocorrelazione	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt = R_x(\tau)$	$\|X(f)\|^2 df$

Trasformate notevoli (tempo continuo)

Segnale	*Tempo*	*Frequenza*
Impulso	$x(t) = \delta(t)$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 1$
Rettangolo	$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$X(f) = \frac{\sin \pi T f}{\pi f} = T \cdot sinc(f)$
Seno cardinale	$x(t) = \frac{\sin \pi B t}{\pi t}$	$X(f) = rect\left(\frac{t}{B}\right)$
Seno	$x(t) = \sin 2\pi f_0 t$	$X(f) = \frac{j}{2}\delta(f + f_0) - \frac{j}{2}\delta(f - f_0)$
Coseno	$x(t) = \cos 2\pi f_0 t$	$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
Esponenziale ($t > 0$)	$x(t) = e^{-at}u(t)$	$X(f) = (a + j2\pi f)^{-1}$
Gaussiano	$x(t) = e^{-\pi t^2/\sigma^2}$	$X(f) = \|\sigma\| e^{-\pi\sigma^2 f^2}$

Proprieta' delle trasformate (tempo discreto)

Par.	*Proprieta'*	*Tempo*	*Frequenza*	*Frequenza normalizzata*
(3.5)	Simmetria	Se $x_n e' reale$	$X(-f) = X^*(f)$ $Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\}$ $Im\{X(f)\} = -Im\{X(-f)\}$ $\|X(f)\| = \|X(-f)\|$ $\angle X(f) = -\angle X(-f)$	$X(-\phi) = X^*(\phi)$ $Re\{X(\phi)\} = Re\{X(-\phi)\}$ $Im\{X(\phi)\} = -Im\{X(-\phi)\}$ $\|X(\phi)\| = \|X(-\phi)\|$ $\angle X(f) = -\angle X(-\phi)$
	Complesso coniugato	x_n^*	$X^*(-\phi)$	$X^*(-\phi)$
	Linearita'	$ax_n + by_n$	$aX(f) + bY(f)$	$aX(\phi) + bY(\phi)$
(3.5.1)	Valori nell'origine	x_0	$T\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(f)df$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(\phi)d\phi$
		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$	$X(0)$	$X(0)$
(3.5.2)	Traslazione	x_{n-n_0}	$X(f)e^{-j2\pi fTn_0}$	$X(\phi)e^{-j2\pi\phi Tn_0}$
		$x_n e^{j2\pi f_0 Tn} = x_n e^{j2\pi\phi_0 Tn}$	$X(f - f_0)$	$X(\phi - \phi_0)$
(3.5.3)	Convoluzione	$x_n * y_n$	$X(f)Y(f)$	$X(\phi)Y(\phi)$
(3.5.4)	Modulazione	$x_n y_n$	$T\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} X(\theta)Y(f-\theta)d(\theta)$	$T\int_{-1/2}^{1/2} X(\theta)Y(\phi-\theta)d(\theta)$
(3.5.5)	Relazione di Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|x_n\|^2$	$T\int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \|X(f)\|^2 df$	$T\int_{-1/2}^{1/2} \|X(\phi)\|^2 d\phi$
	Autocorrelazione	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* x_{n+k} = R_x[k]$	$\|X(f)\|^2$	$\|X(\phi)\|^2$

Trasformate notevoli (tempo discreto)

Segnale	*Tempo*	*Frequenza*
Impulso	$x_n = d_n$	$X(\phi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \cdot e^{-j2\pi\phi n} = 1$
Esponenziale ($t > 0$)	$x(t) = a^n u_n$	$X(\phi) = \sum_{0}^{\infty} a^n \cdot e^{-j2\pi\phi n} = \sum_{0}^{\infty}\left(a \cdot e^{-j2\pi\phi}\right)^n$

Campionamento nei tempi

Campionamento ideale	(4.1) $x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) =$ $= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$
Trasformata del campionamento ideale	(4.5) $X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) =$ $= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$
Campionamento di segnali reali	(4.7) $f_{max} < \frac{1}{2T}$ Se la condizione rispettata la trasformata di $x(t)$ si ottiene da quella del segnale campionato $x_c(t)$ eliminando tutte le repliche spettrali tranne quella in banda base $(-f_s/2 \; - \; f_s/2)$
Tr. Fourier normalizzata e segnale campionato	(4.16) $X(\phi) = X_c(\phi/T) = X_c(\phi \cdot f_s)$ Nel passaggio dalla trasformata alla trasformata normalizzata, se sono presenti impulsi essi risultano scalati per l'inverso della frequenza di campionamento (se il passaggio fosse l'opposto moltiplicherei)

Calcolo dell'energia e della potenza

Segnali a energia finita

Legame fra energia segnale-sequenza associata	(4.20) $E_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x_n \rvert^2 = T \int_{1/T} \left\lvert \frac{X(f)}{T} \right\rvert^2 df = \frac{E_t}{T}$

Segnali a potenza finita

Legame fra potenza segnale-sequenza di un periodo	(par 4.5.2) $P_t = \frac{E_t}{T_0} = \frac{T\,E_n}{T_0} = \frac{E_n}{N} =$ $= \frac{1}{N} \sum_{n=0} N - 1 \lvert x_n \rvert^2 = P_n$

Campionamento in frequenza

Data trasf S(f) e passo $F = 1/t_s$

Trasformata campionata	(par. 4.6) $S_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kF)\delta(f-kF) =$ $= S(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(f - \frac{k}{t_s}\right)$
Antitrasformata	(par. 4.6) $s_c(t) = t_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t-kt_s)$
Criterio di campionamento	(4.21) $t_m < \frac{1}{F} = t_S$ con t_m durata del segnale

Trasformata discreta di Fourier

Trasformata discreta di Fourier

(5.1) $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$ calcolata per $0 \le k \le N-1$

Trasformata discreta di Fourier inversa

(5.2) $x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$ calcolata per $0 \le n \le N-1$

Proprieta' della trasformata discreta di Fourier

Par.	*Proprieta'*	*Sequenza*	*DFT*
(5.3.1)	Linearita'	$ax_n + by_n$	$aX_n + bY_n$
(5.3.2)	Simmetria	x_n^*	X_{-k}^* *circolare*
		x_{-n}^* *circolare*	X_k^*
(5.3.3)	Valori iniziali	x_0	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k$
		$\sum_{n=0}^{N-1} x_n$	X_0
(5.3.4)	Traslazione circolare	$\tilde{x}_{n-m}$	$X_k e^{-j2\pi mk/N}$
		$x_n e^{j2\pi np/N}$	X_{n-p}
(5.3.5)	Convoluzione circolare	$\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, y_{n-m}$ *circolare*	$X_k\, Y_k$
(5.3.6)	Modulazione	$x_n\, y_n$	$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_m\, Y_{k-m}$ *circolare*
(5.3.7)	Relazione di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x_n\rvert^2$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert X_k\rvert^2$

Autocorrelazione circolare di una sequanza

(par. 5.3.8) $R_x[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \cdot e^{j2\pi mk/N}$

Cross-correlazione circolare di sequenze

(par. 5.3.9) $R_{xy}[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^* \cdot e^{j2\pi mk/N}$

Segnale	*Sequenza*	*DFT*
Impulso	$x_n = \delta_n$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n \cdot e^{-j2\pi nk/N} = 1$
Impulso ritardato	$x_n = \delta_{n-p}$	$X_k = e^{-j2\pi pk/N}$
Costante di N campioni	$x_n = 1$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j2\pi nk/N = N\delta_k}$
Esponenziale complesso	$x_n = e^{j2\pi\phi n}$	$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(k-N\phi)/N}$

Parametri di processi casuali

Valor medio	(par. 6.2.1) $m_x(t) = E[x_t] = \int_{-\infty}^{\infty} a p_{x_t}(a) da$
Valor medio temporale	$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\, dt$
Valore quadratico medio	(par. 6.2.1) $E\left[\lvert x_t\rvert^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert a\rvert^2 p_{x_t}(a) da$
Valore atteso di una funzione	(par. 6.2.1) $E\big[g(x)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} g(a)x(a)\, da$
Varianza	(par. 6.2.1) $\sigma_x^2(t) = E\left[\lvert x_t - m_x(t)\rvert^2\right] =$
	$= E\left[\lvert x_t\rvert^2\right] - \lvert m_x(t)\rvert^2$
Funzione di autocorrelazione	(par. 6.3.1) $R_x(t_1,t_2) = E\big[x^*(t_1)\cdot x(t_2)\big] =$
	$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a^*\, b\, p_{x(t_1)\, x(t_2)}(a,b) da\, db$
Autocorrelazione per $x(t_1)$ e $x(t_2)$ indipendenti	(par. 6.3.1) $R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)]\cdot E[x^*(t_2)]$
Autocorrelazione temporale	$\mathbb{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t)\, dt$
Funzione di autocovarianza	(par. 6.3.2) $C_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - m_x^*(t_1)m_x(t_2)$
Autocovarianza per $x(t_1)$ e $x(t_2)$ indipendenti	(par. 6.3.2) $C_x(t_1,t_2) = 0$
Coefficiente di correlazione	(6.3) $\rho_x(t_1,t_2) = \frac{C_x(t_1,t_2)}{\sqrt{\sigma^2_{x(t_1)}\cdot\sigma^2_{x(t_2)}}}$

Parametri di processi casuali stazionari

Parametri ora indipendenti dal tempo	σ_x^2, m_x
Funzione di autocorrelazione	(6.7) $R_x(t,t+\tau) = R_x(\tau) = E\big[x^*(t)\cdot x(t+\tau)\big]$
	$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a^*\, b\, p_{x(t)\, x(t+\tau)}(a,b) da\, db$
Simmetria compl. coniug. dell'autocorrelazione	(par. 6.4.1) $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
Picco di autocorrelazione	(par. 6.4.1) $R_x(0) \geq \lvert R_x(\tau)\rvert$
Funzione di cross-correlazione	(par. 6.4.4) $R_{xy}(\tau) = E\big[y^*(t)\cdot x(t+\tau)\big]$
Funzione covarianza	(par. 6.4.4) $C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x\, m_y^*$
Funzione di autocovarianza	(par. 6.4.1) $C_x(\tau) = R_x(\tau) - \lvert m_x\rvert^2$
Autocovarianza in 0	(par. 6.4.1) $C_x(\tau)\Big\rvert_{\tau=0} = \sigma_x^2$
Coefficiente di correlazione	(par. 6.4.1) $\rho_x(\tau) = \frac{C_x(\tau)}{\sigma_x^2}$
Relazioni tra variabili temporali e di insieme	(par. 6.5.1) $E[\mu_x] = m_x$
	(par. 6.5.1) $E[\mathbb{R}_x(\tau)] = R_x(\tau)$

Predizione

Predizione lineare (ottima per processi gaussiani)	(6.10) $\hat{x}(t_2) = \rho(\tau)\cdot x(t_1), \quad \tau = t_2 - t_1$

Processi casuali gaussiani

Densita' di probabilita' gaussiana	(par. 6.4.3) $p_{x(t)}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(a-m_x)^2}{2\,\sigma_x^2}}$
Densita' di probabilita' congiunta	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau)x(t)}(a,b) =$ $\frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \cdot e^{-\frac{a^2+b^2-2\rho_x(\tau)\,ab}{2\sigma_x^2(1-\rho_x^2(\tau))}}$
In caso di incorrelazione	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau),x(t)}(a,b) = p_{x(t+\tau)}(a)\,p_{x(t)}(b)$
Densita' di probabilita' condizionata	(par. 6.4.3) $p_{x(t+\tau)\|x(t)}(b) = \frac{p_{x(t+\tau)\,x(t)}(a,b)}{p_{x(t)}(a)} =$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho_x^2)}} \cdot e^{-\frac{(b-a\rho)^2}{2\sigma_x^2\,(1-\rho_X^2)}}$

Processi casuali ergodici

Processi ergodici per la media	(par. 6.5.1) $m_x = \mu_x$
Processi ergodici per l'autocorrelazione	(par. 6.5.1) $R_x(\tau) = \mathbb{R}_x(\tau)$

Densita' spettrale di potenza

Tempo continuo

Densita' spettrale di potenza	(6.17) $S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$
Autocorrelazione da densita' spettrale	(6.18) $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,e^{j2\pi f\tau}\,df$
Potenza di un processo casuale	(par 6.6.1) $P = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$

Tempo discreto

Densita' spettrale di potenza	(par 6.6.2) $S_x(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m]\,e^{-j2\pi\phi m}$
Densita' spettrale tempo discreto	(par 6.6.2) $S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(mT)\,e^{-j2\pi fmT}$
Autocorrelazione da densita' spettrale	(par. 6.6.2) $R_x[m] = \int_0^1 S_x(\phi)\,e^{j2\pi\phi m}\,d\phi$
Autocorrelazione da densita' spettrale TD	(par 6.6.2) $R_x(mT) = T\int_{-1/2T}^{1/2T} S_x(f)\,e^{j2\pi fmT}\,df$
Potenza media di un processo casuale	(par. 6.6.2) $E\big[x_n^2\big] = R_x[0] = \int_0^1 S_x(\phi)\,d\phi$

Processi casuali bianchi

Tempo continuo

Autocovarianza impulsiva	(par. 6.6.1) $C_x(\tau) = k\delta(\tau)$
Autocorrelazione	(par. 6.6.1) $R_x(\tau) = k\delta(\tau) + \|m_x\|^2$
Densita' spettrale	(par. 6.6.1) $S_x(f) = k + \|m_x\|^2\,\delta(f)$
Potenza processo bianco ideale	∞

Tempo discreto

Autocovarianza impulsiva	(par. 6.6.2)	$C_x[m] = k\delta_m$
Autocorrelazione	(par. 6.6.2)	$R_x[m] = k\delta_m + \lvert m_x \rvert^2$
Densita' spettrale	(par. 6.6.2)	$S_x(\phi) = k + \lvert m_x \rvert^2 \delta(\phi)$
Potenza processo bianco ideale	(par. 6.6.2)	$P = R_x[0] = \int_0^1 S_x(\phi)\, d\phi = k + \lvert m_x \rvert^2$

Processi casuali bianchi in banda bilatera W

Tempo continuo

Autocorrelazione	(par. 6.6.1)	$R_x(\tau) = k \dfrac{\sin \pi W \tau}{\pi \tau} + \lvert m_x \rvert^2$
Potenza	(par. 6.6.1)	$P = R_x(0) = kW + \lvert m_x \rvert^2$
Varianza	(par. 6.6.1)	$\sigma_x^2 = C_x(0) = kW$
White gaussian noise	(par. 6.6.1)	$p_x(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$
Densita' spettrale White gaussian noise	(par. 6.6.1)	$S_x(f) = \dfrac{\sigma_x^2}{W}$
Autocovarianza White gaussian noise	(par. 6.6.1)	$C_x(\tau) = R_x(\tau) = \dfrac{\sigma_x^2}{W} \dfrac{\sin \pi W \tau}{\pi \tau}$

Cross-spettro

Cross-spettro	(par 6.6.4)	$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$
Cross-correlazione da cross-spettro	(par. 6.6.4)	$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f)\, e^{j2\pi f \tau}\, df$
Relazione per processi reali	(par. 6.6.4)	$S_{xy}(f) = S_{yx}(-f) = S_{yx}^*(f)$

Processi casuali attraverso sistemi LTI

- (par 6.7.3) *Se la densita' di probabilita' del processo in ingresso ad un sistema LTI e' gaussiana, anche l'uscita sara' gaussiana, qualsiasi sia la risposta all'impulso del sistema.*
- (par 6.7.3) *Se la durata della risposta all'impulso del sistema LTI e' molto maggiore del tempo di decorrelazione del processo in ingresso, la densita' di probabilita' dell'uscita tendera' a diventare gaussiana.*

Tempo continuo

Valor medio dell'uscita	(par. 6.7.2)	$m_y = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = m_x H(0)$
Autocorrelazione dell'uscita	(par. 6.7.2)	$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$
Densita' spettrale	(par. 6.7.2)	$S_y(f) = S_x(f) \cdot \lvert H(f) \rvert^2$
Cross-correlazione uscita ingresso	(par. 6.7.2)	$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$
	(par. 6.7.2)	$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h^*(\tau)$
Cross-spettro	(par. 6.7.2)	$S_{yx}(f) = S_x(f) H(f)$
	(par. 6.7.2)	$S_{xy}(f) = s_x(f) H(-f)$

Tempo discreto

Valor medio dell'uscita	(par. 6.7.1) $E[y_n] = m_x\, H(0)$
Autocorrelazione dell'uscita	(6.23) $R_y[m] = R_x[m] * h_m * h^*_{-m}$
Densita' spettrale	(par. 6.7.1) $S_y(\phi) = S_x(\phi) \cdot \lvert H(\phi)\rvert^2$
Cross-correlazione uscita ingresso	(6.24) $R_{yx}[m] = R_x[m] * h_m$
Cross-correlazione con ingr. rumore bianco a valor medio nullo	(par. 6.7.1) $R_{yx}[m] = A\delta_m * h_m = Ah_m$

Codifica di segnali numerici

Errore di quantizzazione delle ampiezze	(par. 7.1) $e_q[n] = x[n] - x_q[n]$
Escursione massima del segnale da quantizzare	$2V$
Numero dei livelli di quantizzazione	M
Intervallo di quantizzazione	(par. 7.1) $\Delta = \frac{2V}{M}$
Media dell'errore di quantizzazione	(par. 7.1) $E\big[e_q[n]\big] = 0$
Varianza dell'errore di quantizzazione	(par. 7.1) $\sigma^2_{eq} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3M^2} = P_{eq}$
Bit necessari per codifica binaria	(par. 7.1) $K = log_2\, M$
Potenza dell'errore di quantizzazione	(7.1) $(P_{eq})_{dB} = 10\, log_{10}\Big(\frac{V^2}{3}\Big) - 6K$
Rapporto segnale-rumore	(par. 7.1) $(S\,N\,R_q)_{dB} = \Big(\frac{P_x}{P_{eq}}\Big)_{dB} = 6K$
Bit rate medio	(par. 7.2) $E\,[\text{bit-rate}] = f_s \sum_{i=1}^{2^K} P_i\, K_i$

Entropia della sorgente

Sorgente senza memoria	(7.3) $H = \sum_{i=1}^{M} -P_i\, log_2\,(P_i)$ bit/simbolo
Sorgente senza memoria con simboli equiprobabili	(7.4) $H = log_2\, M$ bit/simbolo

Appendice di analisi

Trigonometria

$sin^2A + cos^2A = 1$

$sin(A \pm B) = sinAcosB \pm cosAsinB$

$cos(A \pm B) = cosAcosB \mp sinAsinB$

$tan(A \pm B) = \frac{tanA \pm tanB}{1 \mp tanAtanB}$

$sin2A = 2sinAcosA$

$cos2A = cos^2A - sin^2A$

$tan2A = \frac{2tanA}{1-tan^2A}$

$sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$

$cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}$

$tan\frac{A}{2} = \frac{sinA}{1+cosA}$

$sin^2A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2A$

$cos^2A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2A$

$sinA + sinB = 2sin\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)$

$sinA - sinB = 2cos\frac{1}{2}(A+B)sin\frac{1}{2}(A-B)$

$cosA + cosB = 2cos\frac{1}{2}(A+B)cos\frac{1}{2}(A-B)$

$cosA - cosB = 2sin\frac{1}{2}(A+B)sin\frac{1}{2}(B-A)$

$sinA\,sinB = \frac{1}{2}\{cos(A-B) - cos(A+B)\}$

$cosA\,cosB = \frac{1}{2}\{cos(A-B) + cos(A+B)\}$

$sinA\,cosB = \frac{1}{2}\{sin(A-B) + sin(A+B)\}$

Derivate

$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

Chain rule: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,sin\,u = cos\,u\,\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,cos\,u = -sin\,u\,\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,tan\,u = -sec^2\,u\,\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,sin^{-1}\,u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\ (-\frac{\pi}{2} < sin^{-1}\,u < \frac{\pi}{2})$

$\frac{d}{dx}\,cos^{-1}\,u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},\ (0 < cos^{-1}\,u < \pi)$

$\frac{d}{dx}\,tan^{-1}\,u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx},\ (-\frac{\pi}{2} < tan^{-1}\,u < \frac{\pi}{2})$

$\frac{d}{dx}\,e^u = e^u\,\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,ln\,u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\,log_a u = \frac{log_a e}{u}\frac{du}{dx},\ a \neq 0, 1$

Integrali

Integrazione per parti: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int \frac{du}{u} = ln|u|$

$\int e^u\,du = e^u$

$\int a^u\,du = \frac{a^u}{ln\,a},\ a > 0,\ a \neq 1$

$\int sin\,u\,du = -cos\,u$

$\int cos\,u\,du = sin\,u$

$\int tan\,u\,du = -ln\,cos\,u$

$\int sin^2\,u\,du = \frac{u}{2} - \frac{sin\,2u}{4} = \frac{1}{2}(u - sin\,u\,cos\,u)$

$\int tan^2\,u\,du = tan\,u - u$

$\int cos^2\,u\,du = \frac{u}{2} + \frac{sin\,2u}{4} = \frac{1}{2}(u + sin\,u\,cos\,u)$

$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\,\frac{u}{a}$

$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)$

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = sin^{-1}\,\frac{u}{a}$

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = ln(u + \sqrt{u^2-a^2})$

$\int e^{ax}sin\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,sin\,bx - b\,cos\,bx)}{a^2+b^2}$

$\int e^{ax}cos\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,cos\,bx - b\,sin\,bx)}{a^2+b^2}$

$\int x\,sin\,ax\,dx = \frac{sin\,ax}{a^2} - \frac{x\,cos\,ax}{a}$

$\int x^2 sin\,ax\,dx = \frac{2x}{a^2}sin\,ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)cos\,ax$

$\int sin^2\,ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sin\,2ax}{4a}$

$\int x\,cos\,ax\,dx = \frac{cos\,ax}{a^2} + \frac{x\,sin\,ax}{a}$

$\int x^2 cos\,ax\,dx = \frac{2x}{a^2}cos\,ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)sin\,ax$

$\int cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{sin\,2ax}{4a}$

$\int tan^2 ax\,dx = \frac{tan\,ax}{a} - x$

$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}(x - \frac{1}{a})$

$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - x$

$\int x\,ln\,x\,dx = \frac{x^2}{2}(ln\,x - \frac{1}{2})$

Serie

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad |a| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad a \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{a\{1-(n+1)a^n + na^{n+1}\}}{(1-a)^2}$$

Appendice di probabilita'

Frequenza di un evento a	$F_{rel} = \frac{N_a}{N}$
Probabilita' frequentista	$P(a) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_a}{N}$

Probabilita' dell'unione	$P(a \cup b) = P(a) + P(b) - P(a \cap b)$
Probabilita' dell'unione (eventi qualsiasi)	$P(a_1 \cup a_2 \cup \ldots a_n) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(a_{i_1} \cap a_{i_2}) \ldots$
	$+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_r} P(a_{i_1} \cap a_{i_2} \cap \cdots \cap a_{i_r}) + \ldots$
	$+ (-1)^{n+1} P(a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_n)$
Probabilita' condizionata	$P(a \,\vert\, b) = \frac{P(a \cap b)}{P(b)}$
Probabilita' composta	$P(a \cap b) = P(a)P(b \,\vert\, a) = P(b)P(a \,\vert\, b)$
Teorema di Bayes	$P(a \,\vert\, b) = \frac{P(b \,\vert\, a)P(a)}{P(b)}$
Probabilita' totali	$P(a) = \sum_i P(a \,\vert\, E_i)\, P(E_i)$

Densita' di probabilita' p_x	$P(a_1 < x \leq a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p_x(a)\, da$
Densita' di probabilita' congiunta	$p_{xy}(a, b) = \frac{P(a \leq x \leq a + da,\ b \leq y \leq b +_{dB})}{da \cdot_{dB}}$
Legame tra ddp congiunta e condizionata	$p_{xy}(a, b) = p_{y/x=a}(b) \cdot p_x(a)$
Funzione di distribuzione	$F_x(a) = P(x \leq a)$
Densita' di probabilita'	$\lim_{da \to 0} p_x(a) = \frac{P(a < x < a + da)}{da}$
Densita' di probabilita' congiunta (2 var.)	$p_{xy}(a, b) = \frac{P(a < x < a + da, b < y < b +_{dB})}{da\ _{dB}}$
Distribuzioni marginali a partire dalla densita' congiunta	$p_x(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(a, b)\ _{dB}$
	$p_y(b) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(a, b)\, da$
Funzione di distribuzione, valori agli estremi	$F_x(-\infty) = 0$
	$F_x(+\infty) = 1$
Non negativita' della densita' di probabilita'	$p_x(a) \geq 0$
Integrale unitario	$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(a) = 1$
Relazione tra FDD e DDP	$p_x(a) = \frac{dF_x(a)}{da}$
Indipendenza nella probabilita' congiunta	$p_{xy}(a, b) = p_y(b)\, p_x(a)$

Per un ripasso delle formule di probabilita' si veda anche:
`http://home.deib.polimi.it/prati/PwPoint/ProbabilityBasics.pdf`